

Mate Vujčić

OSNOVE PRIMJENJENE MEHANIKE



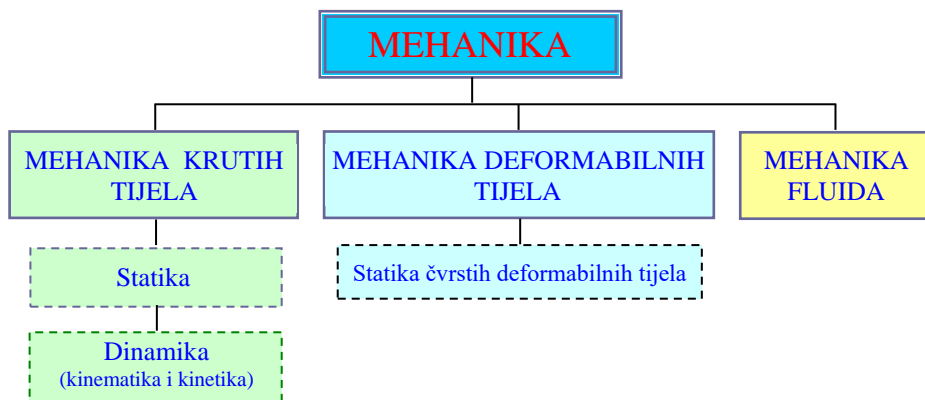
OSNOVE PRIMJENJENE MEHANIKE (M.Vujčić)

1. UVOD	2
2. STATIKA KRUTIH TIJELA	3
2.1. Sila	3
2.2. Ravnoteža dviju kolinearnih sila	3
2.3. Rezultanta dviju sila	3
2.4. Rastavljanje sile na dvije komponente	5
2.5. Rezultanta konkurentnog skupa sila	5
2.6. Moment sile	8
2.7. Par ili spreg sila	10
2.8. Redukcija sile	11
2.9. Ravninski skup sila	11
2.10. Veze i reakcije veza	13
2.11. Ravnoteža skupova sila	14
2.12. Komponente sile u prostoru	18
2.13. Trenje	19
2.14. Težište	26
3. STATIKA ČVRSTIH DEFORMABILNIH TIJELA	33
3.1. Naprezanje	33
3.2. Deformacije	34
3.3. Hookeov zakon, dijagram razvlačenja i dopušteno naprezanje	34
3.4. Aksijalno opterećenje	36
3.5. Smicanje	38
3.6. Uvijanje	39
3.7. Savijanje	40
3.8. Izvijanje	44
4. KINEMATIKA	47
4.1. Jednoliko pravocrtno gibanje čestice	48
4.2. Jednoliko promjenjivo pravocrtno gibanje čestice	49
4.3. Brzina i ubrzanje pri krivocrtnom gibanju čestice	52
4.4. Translacija tijela	56
4.5. Vrtanja ili rotacija tijela	57
4.6. Brzine i ubrzanja točaka tijela pri rotaciji	59
4.7. Ravninsko gibanje tijela	61
5. KINETIKA	66
5.1. Inercijska sila ili d' Alembertova sila	68
5.2. Mehanički rad	70
5.3. Snaga	72
5.4. Rad i snaga pri rotaciji	73
5.5. Stupanj mehaničkog djelovanja	75
5.6. Mehanička energija	76
5.7. Dinamička jednadžba rotacije	79
6. MEHANIKA FLUIDA	82
6.1. Tlak	82
6.2. Pascalov zakon	83
6.3. Hidrostatski tlak i tlak na dubini	84
6.4. Jednadžba kontinuiteta	85
6.5. Energija tekućine i Bernoullijeva jednadžba	86
6.6. Vrste strujanja i Reynoldsov broj	88
6.7. Linijski i lokalni gubici u cjevovodima	89
6.8. Ukupni otpor cjevovoda i snaga pumpe	90

1. UVOD

Mehanika je znanost koja proučava stanje mirovanja i gibanje tijela pod djelovanjem sila. Ona je u vezi gotovo sa svim pojavama u prirodi i tehničkim stvaralaštvom.

Primjena mehanike u rješavanju inženjerskih zadataka naziva se primjenjena (inženjerska ili tehnička) mehanika. Područje mehanike je vrlo široko s brojnim disciplinama, koje je poteško i nabrojiti u strogo razgraničenom smislu. Elementarno gradivo mehanike može se podijeliti u tri dijela: mehanika krutih tijela, mehanika deformabilnih tijela i mehanika fluida (slika 1.1).



Slika 1.1. Shematski prikaz područja mehanike

Mehanika krutih tijela obično se dijeli na statiku i dinamiku, koja u svoje područje uključuje i kinematiku i kinetiku.

Statika krutih tijela je dio mehanike koja proučava ravnotežu sila koje djeluju na kruto tijelo u mirovanju ili jednodolikom i pravocrtnom gibanju.

U dinamici krutih tijela se proučava gibanje tijela, u kinematici geometrijska svojstva gibanja tijela, a u kinetici odnosi između sila i gibanja tijela koja one izazivaju ili mijenjaju.

Proučavanjem ravnoteže između vanjskih i unutarnjih sila (naprezanja) i deformacija bavi se mehanika čvrstih deformabilnih tijela.

U mehanici fluida se proučava mirovanje i gibanje (strujanje) fluida, što je zajedničko ime za tekućine i plinove.

Proučavanje gradiva mehanike temelji se na logičnom razmišljanju („zdrav razum“) i uključivanju sadržaja matematike i fizike iz prethodnog školovanja, dajući im novi smisao i praktičnu korist za inženjersku praksu.

Na kraju uvoda kažimo da nije moguće elementarno razumjevanje iskorištavanja i održavanja strojeva, vozila, i drugih raznovrsnih tehničkih konstrukcija, naprava i opreme u poljoprivredi bez osnovnog poznavanja pojmova i zakona mehanike.

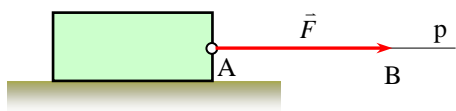
2. STATIKA KRUTIH TIJELA

Već smo kazali da statika krutih tijela proučava ravnotežu sila koje djeluju na kruta tijela u stanju mirovanja (ili jednolikog gibanja u pravcu). Prirodna tijela, tehničke konstrukcije, vozila, strojevi i njihovi dijelovi nazivamo u mehanici tijela, koje dijelimo na kruta i čvrsta.

Kruto tijelo je apsolutno čvrsto tijelo kod kojega razmaci među njegovim česticama ostaju nepromijenjeni bez obzira na stanje mirovanja ili gibanja tijela pod djelovanjem proizvoljnog skupa sila. Ako se krutom tijelu zanemare dimenzije, ono se naziva sitno tijelo ili čestica.

2.1. Sila

Svako djelovanje tijela na tijelo, koje nastoji promijeniti stanje mirovanja ili gibanja tijela, naziva se sila. Djelovanje sile na tijelo je određeno iznosom, pravcem i smjerom sile. Budući da ove značajke odgovaraju vektorima, zaključujemo da je sila vektorska veličina.



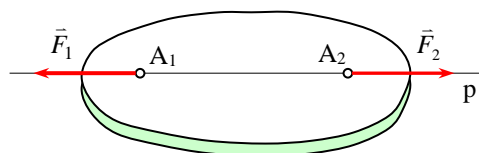
Slika 2.1. Sila kao vektor

Na slici 2.1. iznos sile (brojčana vrijednost, intenzitet, modul, veličina) je određen, u nekom mjerilu, od početka vektora (hvatišta A) do šiljka vektora (točka B). Jedinica za mjerenje iznosa sile je njutn (znak: N) i njegove decimalne jedinice, na primjer kilonjtn (znak kN = 10^3 N). Pravac djelovanja sile je označen slovom p, a strjelica označava smjer ili smisao djelovanja.

Hvatište A je točka u kojoj se prenosi djelovanje sile na tijelo. Silu označavamo slovom F , odnosno strjelicom iznad \vec{F} , kad želimo posebno naglasiti da je sila vektor. Sila se obično mjeri dinamometrima.

2.2. Ravnoteža dviju kolinearnih sila

Sile koje imaju zajednički pravac djelovanja nazivamo kolinearnim silama (slika 2.2). Dvije sile



Slika 2.2. Ravnoteža dviju kolinearnih sila

što djeluju u različitim (ili istim) hvatištima su u ravnoteži ako imaju isti iznos ($F_1 = F_2$), zajednički pravac djelovanja, a suprotan smjer.

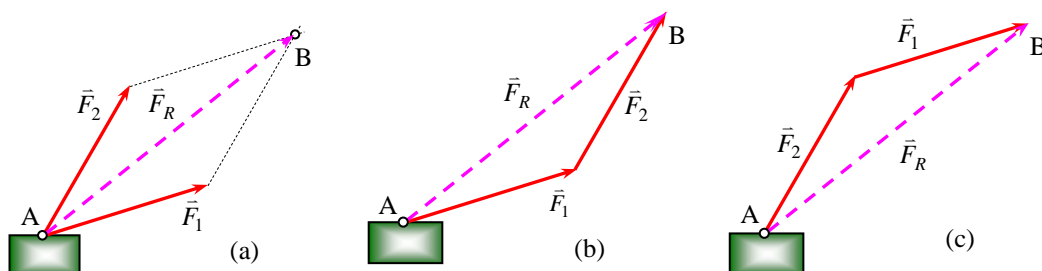
Ravnoteža označava pojam kada je rezultanta jednaka nuli, odnosno, kada se djelovanje sila međusobno poništava.

Primjenom prethodno rečenog, može se pokazati da se hvatište sile na krutom tijelu može pomicati po pravcu djelovanja. Stoga kažemo da je sila klizni vektor ili vektor vezan za pravac.

2.3. Rezultanta dviju konkurentnih sila

Sile zajedničkog hvatišta ili sile čiji se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki nazivaju se konkurentnim silama. Dvije konkurentne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 različitih pravaca djelovanja mogu se zamijeniti jednom silom koja je njihova rezultanta.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2.1.)$$

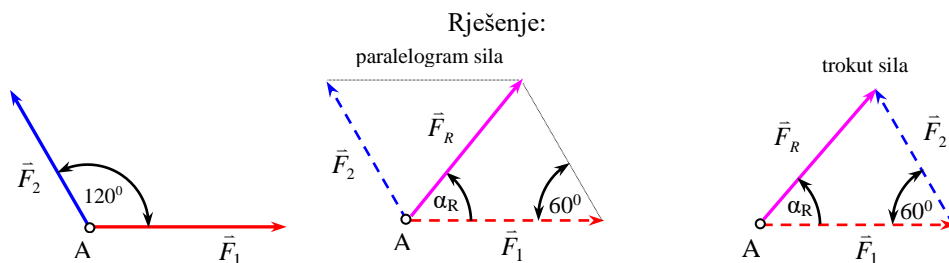


Slika 2.3. Rezultanta dviju sila – konstrukcija paralelograma (a) i trokuta sila (b i c)

Rezultantu silu moguće je odrediti konstrukcijom paralelograma sila (slika 2.3.a) ili trokuta sila (slika 2.3.b i c). Iz šiljka sile \vec{F}_1 povučemo paralelu sa silom \vec{F}_2 , a iz šiljka sile \vec{F}_2 povlačimo paralelu sa silom \vec{F}_1 . Dijagonala ili spojnica hvatišta A sa sjecištem tih paralela (točka B) predočava rezultantu \vec{F}_R . Vidimo da se paralelogram sila (slika 2.3.a) sastoji od dva jednaka trokuta. Dakle, očito je ako na šiljak sile \vec{F}_1 nanese silu \vec{F}_2 , tada će treća stranica trokuta predočavati rezultantu \vec{F}_R (slika 2.3.b). Do istog zaključka o rezultanti \vec{F}_R možemo doći i ako na šiljak sile \vec{F}_2 nanese silu \vec{F}_1 (slika 2.3.c).

Prema tome, jasno je da rezultanta zamjenjuje svoje komponente i da ne postoji istovremeno zajedno s njima kao neka zasebna sila. Geometrijsko sastavljanje sila primjenom paralelograma ili trokuta sila jedan je od temeljnih aksioma mehanike.

Primjer 2.1. Odredi rezultantu sila $F_1 = 40$ N i $F_2 = 30$ N. Sila \vec{F}_1 je vodoravna i usmjerena udesno, a sila \vec{F}_2 zatvara kut $\alpha = 120^\circ$ sa silom \vec{F}_1 (slika 2.4.).



Slika 2.4. uz primjer 2.1.

Nacrtajmo paralelogram i trokut sila. Kut između sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 u trokutu sila iznosi 60° , jer je $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Iz paralelograma ili trokuta sila (slika 2.4.) nalazimo iznos rezultante kosinusovim poučkom

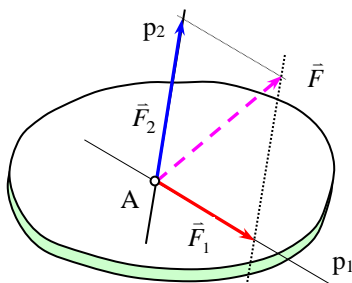
$$F_R = +\sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 60^\circ} = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0,5} = 36,06 \text{ N}$$

Pomoću sinusova poučka odredimo kut orijentacije α_R rezultante \vec{F}_R prema sili \vec{F}_1 .

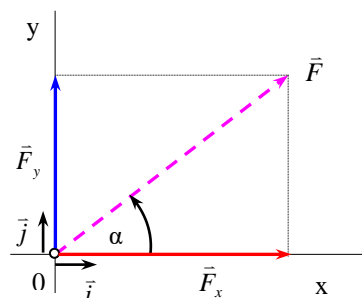
$$\frac{\sin \alpha_R}{F_2} = \frac{\sin 60^\circ}{F_R} \quad \Rightarrow \quad \alpha_R = \arcsin \left(\frac{F_2}{F_R} \sin 60^\circ \right) = 46,1^\circ$$

2.4. Rastavljanje sile na dvije komponente

Svaka se sila može rastaviti u dvije komponente ako su poznati pravci tih komponenta (slika 2.5.). Postupak rastavljanja sile na dvije komponente je obrnut od sastavljanja dviju sila u rezultantu paralelogramom.



Slika 2.5. Rastavljanje sile na komponente



Slika 2.6. Rastavljanje sile na okomite komponente

Posebno je važan primjer rastavljanje sile na dvije međusobno okomite komponente koje se nalaze na koordinatnim osima (slika 2.6.).

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad (2.2.)$$

Komponente \vec{F}_x i \vec{F}_y jednake su umnošku projekcije sile F_x , odnosno F_y , i jediničnog vektora osi \vec{i} , odnosno, \vec{j} . Dakle, $\vec{F}_x = F_x \vec{i}$ odnosno $\vec{F}_y = F_y \vec{j}$.

Projekcije sile F na koordinatne osi nalazimo pomoću trigonometrije.

$$F_x = F \cos \alpha \quad F_y = F \sin \alpha \quad (2.3.)$$

Projekcija sile je pozitivna ako je smjer komponente isti kao i smjer osi (smjer jediničnog vektora), a negativna ako je smjer komponente suprotan pozitivnom smjeru osi.

Poznavanje rastavljanja sile na komponente je napose važno u proučavanju vuče poljoprivrednih strojeva i oruđa traktorom.

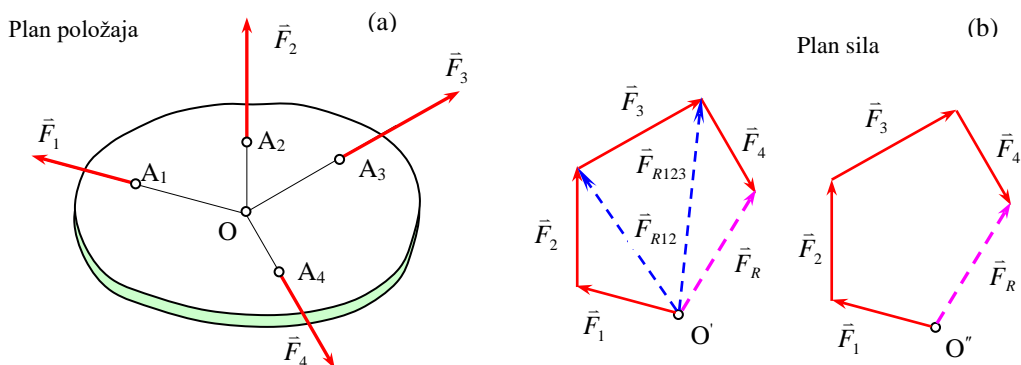
2.5. Rezultanta konkurentnog skupa sila

Rezultanta konkurentnog skupa sila (sile zajedničkog hvatišta), može se odrediti na geometrijski (vektorski) i analitički (računski) način.

a) Geometrijski način

Neka na tijelo u točkama A_1, A_2, \dots, A_n djeluje skup sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (na slici 2.7.a nacrtane su samo prve četiri sile), pri čemu se pravci djelovanja sile sijeku u zajedničkoj točki - hvatištu O. Rezultanta ovog skupa sila može se odrediti postupnom primjenom paralelograma ili trokuta sile. Sile kao vektorske veličine crtamo u prikladnom mjerilu, $1\text{cm} \hat{=} \dots \text{N}$.

Zbog preglednosti, izvan slika 2.7.a, u planu sile iz točke O crtamo silu \vec{F}_1 i sastavljamo sa silom \vec{F}_2 u njihovu parcijalnu rezultantu \vec{F}_{R12} , koju sastavljamo sa silom \vec{F}_3 u rezultantu \vec{F}_{R123} . Crtanje poligona sile završavamo sastavljanjem parcijalne rezultante \vec{F}_{R123} sa silom \vec{F}_4 u rezultantu \vec{F}_R . Očito je rezultanta završna stranica poligona sile (slika 2.7.b), koja spaja početak prve sile i kraj (šiljak) zadnje sile. Često puta parcijalne rezultante uopće ne crtamo, već sile jednostavno "nižemo" jednu na drugu (slika 2.7.b desno).



Slika 2.7. Grafički način određivanja rezultante konkurentnog skupa sila

Dakle, rezultanta ovog konkurentnog skupa sila jednaka je geometrijskom (vektorskom) zbroju zadanih sila.

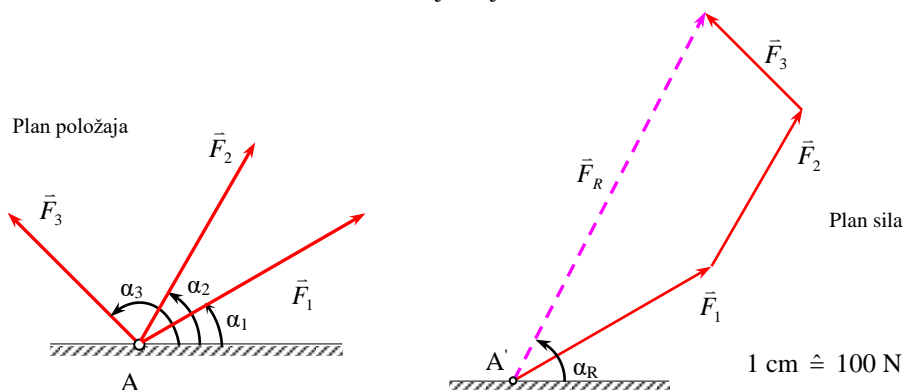
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

ili općenito za n-sila

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.4.)$$

Primjer 2.2. Odredi rezultantu triju konkurentnih sila (slika 2.8.), ako je zadano: $F_1 = 500 \text{ N}$, $F_2 = 400 \text{ N}$, $F_3 = 300 \text{ N}$, $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 60^\circ$ i $\alpha_3 = 135^\circ$. Uzeti mjerilo za sile $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ N}$.

Rješenje:



Slika 2.8. uz primjer 2.2.

Na već opisani način ucrtamo plan sila (slika 2.8.b). Iz plana sila očitamo iznos rezultante $F_R = 910 \text{ N}$ i kut koji ona gradi s referentnom osi $\alpha_R = 62,5^\circ$.

b) Analitički način

Analitički se rezultanta konkurentnog skupa sila određuje primjenom metode projekcije. Projekcija rezultante na neku os jednaka je zbroju projekcija zadanih sila na tu os.

Pri analitičkom postupku određivanja rezultante obično na slikama ispuštamo vektorske oznake za sile. Neka su, na primjer, zadane tri sile čiju rezultantu treba odrediti (slika 2.9.a).



Slika 2.9. Analitički način određivanja rezultante konkurentnog skupa sila

Algebarskim zbrajanjem projekcija sila uzduž osi x, odnosno y, nalazimo projekcije rezultante na te osi.

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

ili općenito za skup od n konkurentnih sila

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{ix} \quad (2.5.)$$

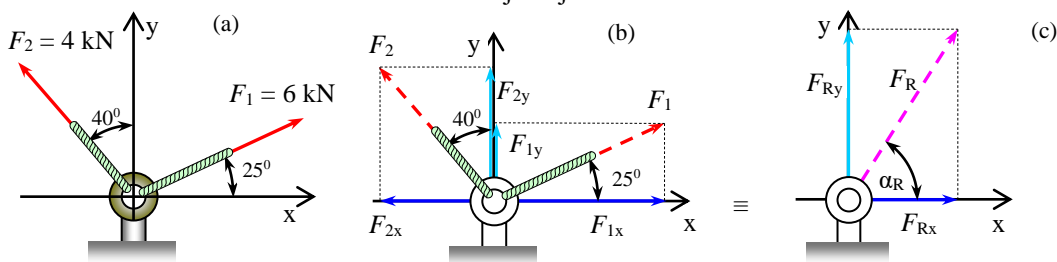
$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{iy} \quad (2.6.)$$

Pomoću nađenih projekcija izračunamo rezultanti iznos F_R i kut orijentacije α_R (slika 2.9.b).

$$F_R = +\sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad \text{i} \quad \alpha_R = \arctan F_{Ry}/F_{Rx} \quad (2.7.)$$

Primjer 2.3. Odrediti iznos i orijentaciju rezultante sila prikazanih na slici 2.10.a.

Rješenje:



Slika 2.10. uz primjer 2.3.

Izvršimo projekciju sila na koordinatne osi (slika 2.20.b) i zbrojimo projekcije uzduž osi.

$$F_{Rx} = F_1 \cos 25^\circ - F_2 \sin 40^\circ = 6 \cdot 0,906 - 4 \cdot 0,643 \approx 5,44 - 2,57 = 2,87 \text{ kN}$$

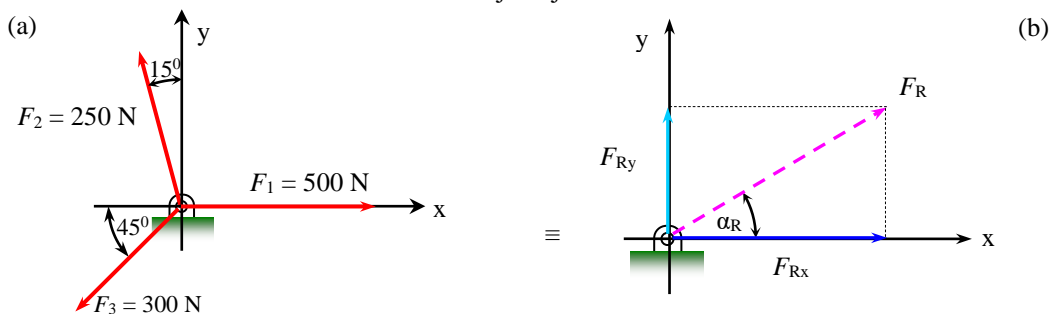
$$F_{Ry} = F_1 \sin 25^\circ + F_2 \cos 40^\circ = 6 \cdot 0,423 + 4 \cdot 0,766 \approx 2,54 + 3,06 = 5,60 \text{ kN}$$

Iznos i orijentaciju rezultante (slika 2.10.c) nalazimo prema jednadžbama (2.7.)

$$F_R = \sqrt{2,87^2 + 5,60^2} \approx 6,3 \text{ kN} \quad \alpha_R = \arctan \frac{5,60}{2,87} = 62,9^\circ$$

Primjer 2.4. Odrediti rezultantu prikazanog skupa sila po iznosu i orijentaciji (slika 2.11.).

Rješenje:



Slika 2.11. uz primjer 2.4.

Izvršiti projekciju sila na koordinatne osi i zbrojiti projekcije uzduž osi.

$$F_{Rx} = F_1 - F_2 \sin 15^\circ - F_3 \cos 45^\circ = 500 - 250 \cdot 0,259 - 300 \cdot 0,707 = 223,2 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = F_2 \cos 15^\circ - F_3 \sin 45^\circ = 250 \cdot 0,966 - 300 \cdot 0,707 = 29,4 \text{ N}$$

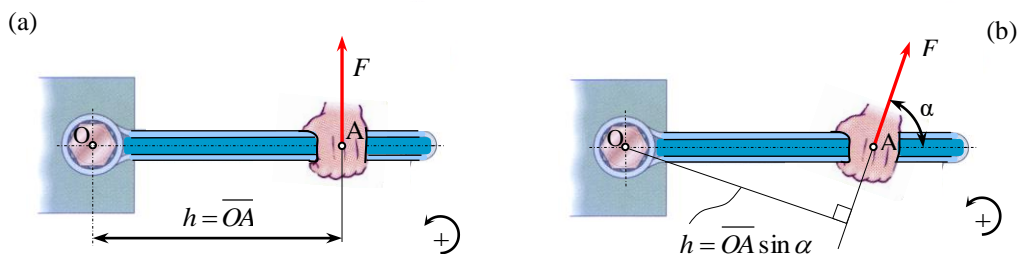
Iznos i orijentacija rezultante nalaze se prema jednadžbama (2.7.)

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{223,2^2 + 29,4^2} = 225,1 \text{ N}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{29,4}{223,2} = 7,5^\circ$$

2.6. Moment sile

Ako, na primjer, otpuštamo vijak pomoću ključa (slika 2.12.), sila F izaziva rotaciju ključa oko okretišta (točke O). Iz iskustva znamo da je okretno djelovanje sile zavisno od njenog iznosa i udaljenosti pravca djelovanja sile od točke O , odnosno osi oko koje se vrši okretanje.



Slika 2.12. Moment sile za točku

Veličina okretnog djelovanja sile iskazuje se umnoškom iznosa sile i njenog kraka. Krak sile je najmanja udaljenosti od točke O do pravca djelovanja sile (slika 2.12.b). Ili kraće rečeno, moment sile za neku točku ili os jednak je umnošku sile i kraka sile.

$$M_O^F = F h \quad (2.8)$$

Očito je zbog većeg kraka $\overline{OA} > \overline{OA} \sin \alpha$, moment sile F na slici 2.12.a veći od momenta sile na slici 2.12.b.

Mjerna jedinica momenta sile dobije se množenjem jedinice za mjerenje sile i jedinice za mjerenje kraka,

$$\text{jedinica momenta sile} = \text{njutn} \times \text{metar} = \text{njutnmetar}$$

Dakle, moment sile se mjeri u njutnmetrima (znak: N·m) i njegovim decimalnim jedinicama, na primjer kilonjutncentimetrima (znak: kN·cm).

Sila F izaziva rotaciju ključa oko točke O u matematički pozitivnom smjeru (slike 2.12.). Izbor smjera je proizvoljan, uz napomenu da se izabranog pozitivnog smjera moramo pridržavati tijekom rješavanja konkretnog zadatka.

Moment sile za točku, pored iznosa i smjera, određen je i pravcem djelovanja. Dakle, moment sile je vektorska veličina. Za razliku od vektora sile, moment sile je vektor vezan za točku.

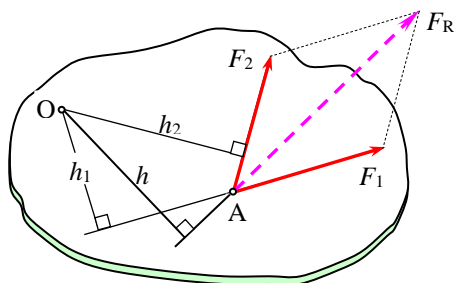
Primjer 2.5. Odrediti moment sile $F = 100 \text{ N}$ za točku O (slika 2.12.b), ako je $\overline{OA} = 20 \text{ cm}$ i kut $\alpha = 60^\circ$.

Rješenje:

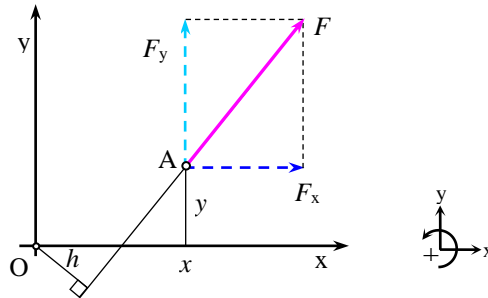
Moment sile F za točku O iznosi

$$M_O^F = F h = F \underbrace{\overline{OA} \sin \alpha}_{\text{krak}} = F \cdot 0,2 \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,2 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Moment rezultante za neku točku, jednak je zbroju momenata komponenta za tu istu točku (slika 2.13.). Ovo je poznati Varignonov (čit. Varinjon) poučak ili momentno pravilo.



Slika 2.13. Momentno pravilo rezultante za točku O



Slika 2.14. Momentno pravilo za silu i njene komponente

$$M_O^F = F h = F_1 h_1 + F_2 h_2 \tag{2.9.}$$

Momentno pravilo za opći skup konkurentnih sila u ravnini ili skup proizvoljnih sila glasi

$$M_O^{F_R} = F_R h_R = F_1 h_1 + F_2 h_2 + \dots + F_n h_n = \sum F_i h_i \tag{2.10.}$$

Što se može izreći: moment rezultante općeg ravninskog skupa sila s obzirom na neku točku (npr. O) jednak je algebarskom zbroju momenata njezinih komponenta za tu istu točku.

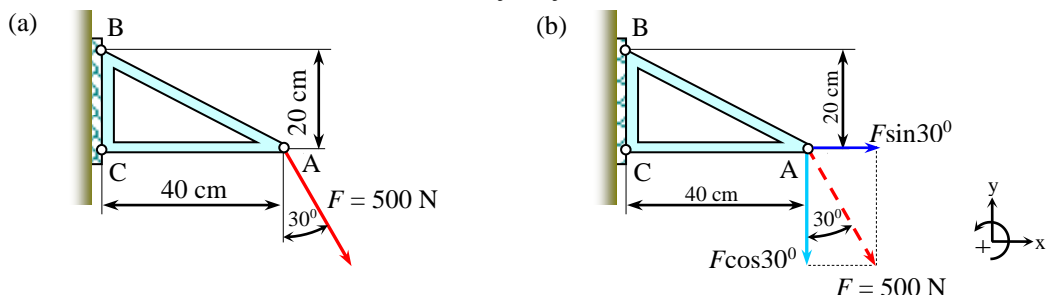
Ako momentno pravilo primijenimo na silu F , koju rastavimo na komponente (slika 2.14.) u smjeru koordinatnih osi F_x i F_y , možemo pisati

$$M_O^F = F h = F_y x - F_x y \tag{2.11.}$$

Dakle, momentu sile F za ishodište koordinatnog sustava O jednak je algebarski zbroj momenata komponenta za točku O . Analizom relacije (2.11.) vidimo da je moment komponente u smjeru osi y , $F_y x$ pozitivnog, a moment komponente u smjeru osi x , $F_x y$ negativnog smjera s obzirom na pozitivno odabrani matematički smjer.

Primjer 2.6. Odrediti moment sile F za točku B (slika 2.15.). Primijeniti Varignonov poučak.

Rješenje:



Slika 2.15. uz primjer 2.6.

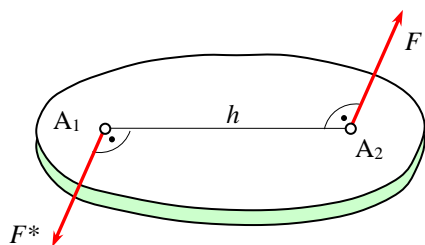
Silu F rastavimo na horizontalnu i vertikalnu komponentu (slika 2.15.b) i primjenom relacije (2.11.) nalazimo moment sile F za točku B . Za pozitivan smjer momenta odabiremo matematički pozitivan smjer!

$$M_B^F = \underbrace{F \sin 30^\circ}_{\text{sila}} \cdot \underbrace{0,2}_{\text{krak}} - \underbrace{F \cos 30^\circ}_{\text{sila}} \cdot \underbrace{0,4}_{\text{krak}} = 500 (0,5 \cdot 0,2 - 0,866 \cdot 0,4) = -123,2 \text{ N}\cdot\text{m}$$

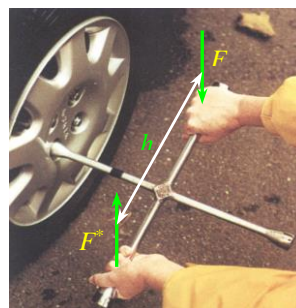
Za vježbu odrediti moment sile F za točku C . Izvedite i odgovarajući zaključak.

2.7. Par ili spreg sila

Par ili spreg sila čine dvije sile (slika 2.16. i 2.17.) jednake po iznosu na paralelnim pravcima djelovanja, a suprotnih smjerova. Razmak između sila h naziva se krak sprega sila.



Slika 2.16. Par ili spreg sila



Slika 2.17. uz primjer 2.7

Spreg sila ne može se nadomjestiti jednom silom. Spreg sila izaziva rotaciju tijela. Moment sprega sila također je vektorska veličina. Vektor momenta sprega sila je slobodni vektor. Iznos momenta sprega sila jednak je umnošku iznosa jedne sile i kraka sprega sila.

$$M = F h \quad (2.12.)$$

Moment sprega sila obično se u ravnini naznačuje zakrivljenom strjelicom. Spreg sila može se pomicati po ravnini djelovanja ili njoj paralelnoj ravnini u prostoru.

Moment sprega sile mjeri se kao i moment sile u njutnmetrima (znak: N·m) i njegovim decimalnim jedinicama.

Primjer 2.7. Ako je otpor pritezanju vijka (slika 2.17.) na kotaču automobila u obliku momenta sprega $M = 80 \text{ N}\cdot\text{m}$, kolikom silom treba djelovati na rukohvatu ključa ako je $h = 40 \text{ cm}$?

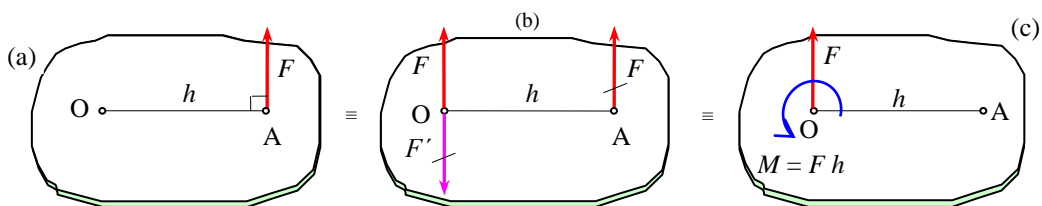
Rješenje:

Iz jednačbe $M = F h$ nalazimo silu u ruci

$$F = \frac{M}{h} = \frac{80}{0,4} = 200 \text{ N}$$

2.8. Redukcija sile

Ako na krutu ploču (slika 2.18.) djeluje sila F u točki A, tada se njezino djelovanje može zamijeniti djelovanjem iste sile F u točki O, kojoj se još pridružuje i spreg sile momenta $M = F h$. Dakle, djelovanje sile F u točki A zamijenili smo u točki O reduciranom silom F i reduciranim spregom M . Taj se postupak zove redukcija sile ili svođenje sile na zadanu točku.

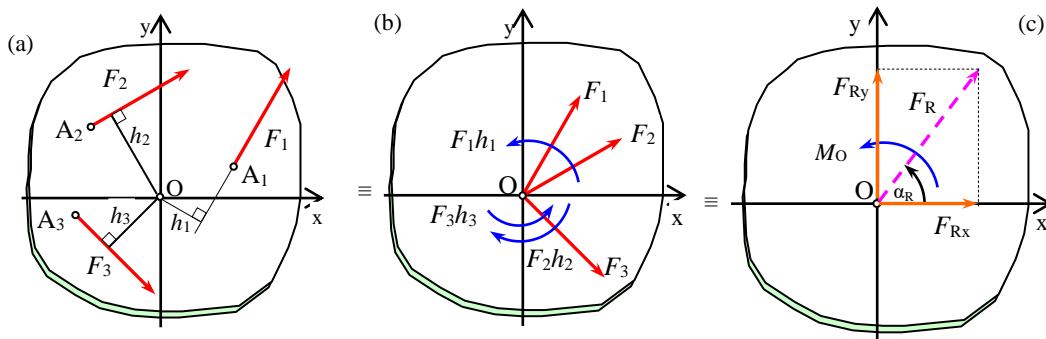


Slika 2.18. Redukcija sile

Iz prikazanog postupka na slici 2.18. slijedi, kao obrnuta mogućnost zamjene djelovanja sile i sprega u točki O, samo jednom silom u točki A, pomaknutoj od točke O za krak h .

2.9. Ravninski skup sila

Neka na krutu ploču (slika 2.19.a) u hvatištima A_1, A_2 i A_3 djeluju sile F_1, F_2 , i F_3 , koje treba reducirati u točku O. Ako svaku silu reduciramo u točki O, sukladno prethodno opisanom postupku o redukciji sile na zadanu točku, dobijemo skup od tri konkurentne sile F_1, F_2 , i F_3 i isto toliko njihovih spregova sile momenata $F_1 \cdot h_1, F_2 \cdot h_2$ i $F_3 \cdot h_3$, koji su ucrtani pomoću zakrivljenih strjelica (slika 2.19.b).



Slika 2.19. Redukcija ravninskog skupa sila

Sastavljanjem sila u točki O nalazimo rezultirajuću silu F_R (slika 2.19.c)

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad \text{ili općenito} \quad \vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (2.13.)$$

Iznos i orijentaciju rezultirajuće sile F_R dobijemo analogno postupku određivanja rezultante konkurentnog skupa sila. Dakle, algebarskim zbrajanjem projekcija zadanih sila uzduž osi x i y nalazimo

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad (2.14.)$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (2.15.)$$

Pomoću nađenih projekcija izračunamo iznos rezultirajuće sile i njen kut orijentacije.

$$F_R = +\sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \quad \alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \quad (2.16.)$$

Algebarskim zbrajanjem momenata spregova sila nalazimo i moment rezultirajućeg sprega M_O (slika 2.19.c)

$$M_O = F_1 h_1 + F_2 h_2 + F_3 h_3 \quad \text{ili općenito} \quad M_O = \sum_{i=1}^n F_i h_i \quad (2.17.)$$

Iznos i smjer momenta rezultirajućeg sprega M_O skupa sila u ravnini ovisan je o izboru točke redukcije. Stoga je potrebno naznačiti za koju je redukcijsku točku on računat. Rezultirajuća sila F_R je neovisna je o izboru točke redukcije.

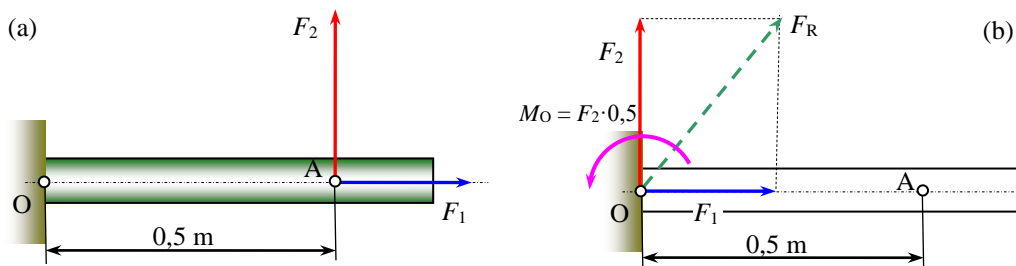
Rezultirajuća sila izražava težnju za translacijom, a moment rezultirajućeg sprega za rotacijom krute ploče.

Prema tome, u proizvoljnoj točki O ravninski se skup sila može reducirati na silu F_R i spreg sila momenta M_O .

Ovdje to nećemo dokazivati, ali recimo da se sila F_R i moment M_O mogu se sastaviti u rezultantu F_R . Rezultanta F_R ima isti iznos, pravac i smjer, kao i sila F_R , ali s hvatištem pomaknutim u neku točku O_1 .

Primjer 2.8. Zadan je skup od dvije sile u točki A (slika 2.20.a); $F_1 = 8$ kN i $F_2 = 15$ kN. Izvršiti redukciju sila u točku O na silu F_R i moment M_O .

Rješenje:



Slika 2.20. uz primjer 2.8.

Po pravcu djelovanja pomaknimo silu F_1 iz točke A u točku O (slika 2.20.b). Zatim paralelno pomaknimo silu F_2 iz točke A u točku O i dodajmo redukcijski moment $M_O = F_2 \cdot 0,5$. U točki O geometrijski zbrojimo silu F_1 i F_2 i izračunamo iznos rezultante F_R .

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17 \text{ kN}$$

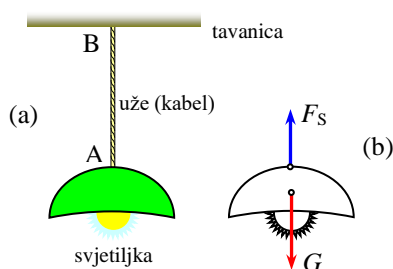
Izračunajmo i redukcijski moment M_O .

$$M_O = F_2 \cdot 0,5 = 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

2.10. Veze i reakcije veza

Svako vezano kruto tijelo ili dio konstrukcije može se promatrati kao slobodno ili izolirano tijelo, ako se postojeće veze uklone i njihov utjecaj zamijeni reakcijama veza. Reakcije veza ili reaktivne sile moraju biti takve da sa aktivnim (zadanim) silama čine uravnoteženi skup sila. Ovo je poznati princip izolacije ili oslobađanja tijela. Na nekoliko primjera ilustrirajmo princip oslobađanja tijela od veza.

Neka je svjetiljka težine G privezana za tavanicu pomoću užeta (kabela) AB prema slici 2.21.a. Ako zamislimo da smo prerezali uže AB, slijedi padanje svjetiljke prema dolje, stoga je sila reakcije užeta usmjerena suprotno, tj. prema tavanici (slika 2.21.b). Dakle, reakcija F_S jednaka je po iznosu težini svjetiljke G a usmjerena je suprotno od smjera popuštanja veze. Elementi veza kao što su: užad, remenje, kablovi, lanci i žice, smatramo idealno savitljivim tijelima koja mogu prenositi samo uzdužne vlačne sile.



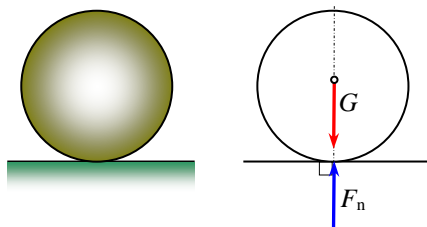
Slika 2.21. Reakcija veza s užetom (kabelom)



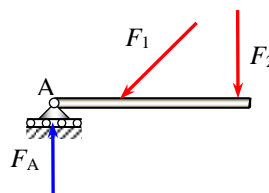
Slika 2.22. Štapovi mogu prenositi i vlačnu i tlačnu silu

Za razliku od užadi, štapovi kao elementi veza pogodan su za prenošenje kako vlačnih tako i tlačnih sila (slika 2.22.).

Reakcija tijela oslonjenog na glatku površinu (ravninu), uvijek je okomita ili normalna na ravninu oslanjanja i usmjerena suprotno od smjera popuštanja veze (slika 2.23.). Reakcija hrapave podloge bit će posebno razmotrena u odjeljku o trenju.

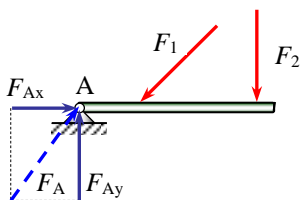


Slika 2.23. Reakcije glatkih površina

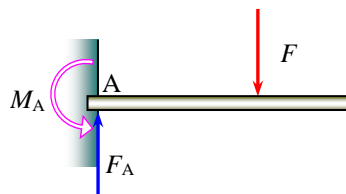


Slika 2.24. Reakcije pomičnog oslonca

Veza tijela u obliku nosača ostvarena je pomoću pomičnog i nepomičnog oslonca ili ležajeva. Reakcija pomičnog oslonca (slika 2.24.) je uvijek okomita na ravninu oslanjanja, dok je reakcija nepomičnog oslonca (slika 2.25.) proizvoljna (kosa) i obično se rastavlja na dvije komponente. Ako je opterećenje nosača vertikalno, tada je vertikalna i reakcija u nepomičnom osloncu.



Slika 2.25. Reakcija nepomičnog oslonca



Slika 2.26. Reakcije konzolnog uklještenja

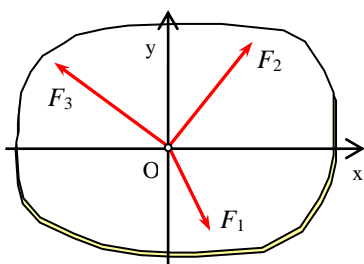
Konzolni nosač (slika 2.26.) na jednom je kraju uklješten, a na drugom je kraju slobodan. Reakcija uklještenja sastoji se od sile i momenta uklještenja. Ako je opterećenje koso uz moment uklještenja, sila reakcije također je kosa.

2.11. Ravnoteža skupova sila

Sile koje djeluju na tijelo izvana nazivamo vanjskim silama. U vanjske sile ubrajamo aktivne i reaktivne sile. Aktivne su one sile kojima okolina djeluje na promatrano tijelo. Reakcije na djelovanje aktivnih sila su reaktivne sile ili sile veza. Među aktivne sile ubrajamo težinu tijela, sile tlaka izgorjelih plinova na čelo klipa kod motora, hidrostatičke sile, magnetske sile i druge vanjske sile. Već spomenute reakcije veza i sile trenja, o čemu će biti govora u slijedećem odjeljku, su reaktivne ili pasivne sile.

Skup aktivnih i reaktivnih sila koje djeluju na neko tijelo nalazi se u ravnoteži ako njihovo zajedničko djelovanje neće pokrenuti tijelo iz stanja mirovanja.

Konkurentni je skup sila uravnotežen ako je rezultanta jednaka nuli ($F_R = 0$), tj. ako su zadovoljene jednačbe:



Slika 2.27. Uvjeti ravnoteže konkurentnog skupa sila

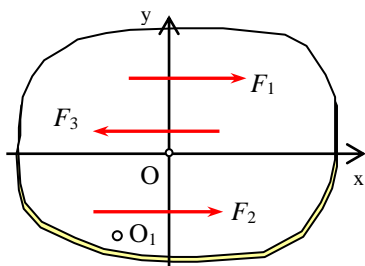
$$\begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_{ix} = 0 \\ F_{Ry} &= \sum F_{iy} = 0 \end{aligned} \quad (2.18.)$$

Osim analitičkih uvjeta ravnoteže (2.18.) često se primjenjuje i grafički postupak koji se sastoji u crtanju zatvorenog poligona sila.

Zatim grafo-analitički postupak u ravnoteži triju neparalelnih sila crtanjem zatvorenog trokuta sila i primjenom sinusova i kosinusova poučka.

Spomenute tri neparalelne sile su u ravnoteži, ako im se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki i ako one zatvaraju trokut sila. Zatvoren trokut sila znači da sve sile imaju isti smisao obilaženja (šiljak zadnje sile pada u početak prve sile).

Za **paralelni skup sila** na primjer s koordinatnom osi x (slika 2.28.) uvjeti ravnoteže glase:



Slika 2.28. Uvjeti ravnoteže paralelnog skupa sila

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = 0$$

$$M_O^{F_i} = \sum M_O^{F_i} = 0 \quad (2.19.)$$

Za paralelni skup sila uvjeti ravnoteže mogu biti:

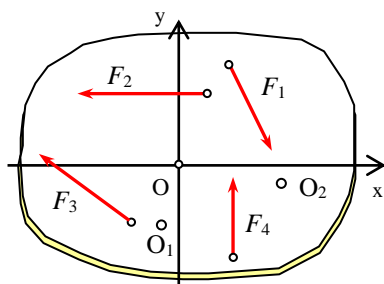
$$M_O^{F_i} = \sum M_O^{F_i} = 0$$

$$M_{O_i}^{F_i} = \sum M_{O_i}^{F_i} = 0 \quad (2.20.)$$

Pritom, pravac povučen kroz točke O i O₁ (slika 2.28.) ne smije biti paralelan sa skupom sila.

Poseban oblik paralelnih sila su tzv. kolinearne sile, tj. sile na istom pravcu djelovanja. Za njihovu ravnotežu dovoljno je da je zbroj sila u pravcu djelovanja jednak nuli.

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i = 0 \quad (2.21.)$$



Slika 2.29. Uvjeti ravnoteže ravninskog skupa sila

Ravninski skup sila je u ravnoteži ako je $F_R = 0$ i $M_O = 0$, tj. ako su ispunjene sljedeće jednačbe (uvjeti):

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = 0$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = 0 \quad (2.22.)$$

$$M_O^{F_i} = \sum M_O^{F_i} = 0$$

Uvjeti ravnoteže ravninskog skupa sila mogu se zapisati još u dva oblika:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum M_O^{F_i} = 0 \quad \sum M_{O_1}^{F_i} = 0$$

$$\sum M_O^{F_i} = 0 \quad \sum M_{O_1}^{F_i} = 0 \quad \sum M_{O_2}^{F_i} = 0 \quad (2.23.)$$

gdje os x ne smije biti okomita na pravac povučen kroz točke O i O₁, odnosno točke O, O₁ i O₂ ne smiju ležati na istom pravcu (slika 2.29.).

Redoslijed rješavanja zadataka: Za određivanje nepoznatih veličina (statičkih i geometrijskih) pri ravnoteži skupa sila što djeluju na vezano tijelo, nužno je primijeniti sljedeći redoslijed:

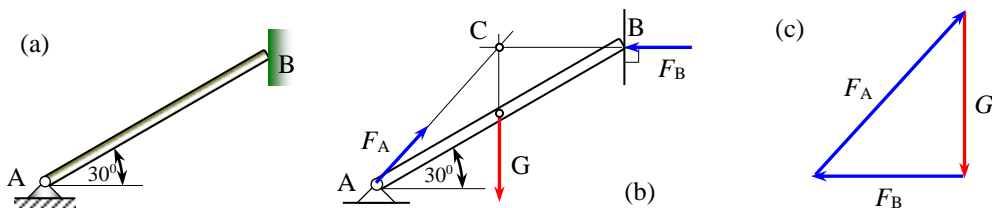
1. osloboditi tijelo od veza, a njihovo djelovanje zamijeniti reakcijama
2. odabrati pravokutni koordinatni sustav, tako da osi budu paralelne ili okomite na što više sila
3. napisati jednačbe ravnoteže
4. rješenjem jednačbi odrediti tražene nepoznanice.

Primjer 2.9. Homogeni nagnuti štap ($\alpha = 30^\circ$), duljine $l = 2\text{ m}$ i težine $G = 500\text{ N}$, zglobno je učvršćen u točki A, a u točki B oslonjen na vertikalnu glatku stijenu. Odredi reakcije F_A i F_B .

Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti grafički. Ucrtajmo težinu G na sredini (težištu) štapa, reakciju u točki B okomito na vertikalnu stijenu. Produžimo pravce djelovanja težine G i reakcije F_B - one se

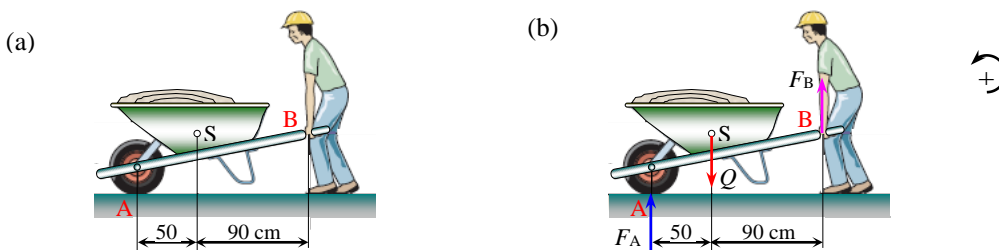
sijeku u točki C (slika 2.30.b.). Kroz točku C mora prolaziti i pravac djelovanja reakcije F_A (ravnoteža triju neparalelnih sila). Na slici 2.30.c crtamo u mjerilu $1\text{cm} \hat{=} 200\text{ N}$ trokut sile iz kojeg očitamo: $F_A = 660\text{ N}$ i $F_B = 430\text{ N}$.



Slika 2.30. uz primjer 2.9.

Primjer 2.10. Kolikom silom F radnik mora djelovati na ručke kolica, u prikazanom položaju ravnoteže, ako je masa materijala i kolica $m = 60\text{ kg}$.

Rješenje:



Slika 2.31. uz primjer 2.10.

U težištu S u crtajmo težinu $Q = mg$, reakciju podloge na kotač kolica u točki A i silu u ruci radnika F_B (slika 2.31.b). Napišimo momentnu jednačbu ravnoteže za točku A između podloge i kotača kolica.

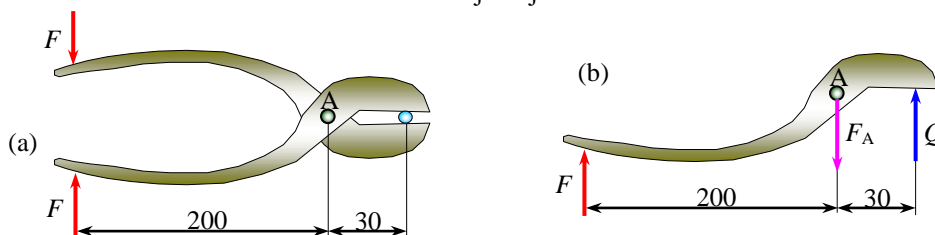
$$\sum M_A^{F_i} = F_B \cdot (0,5 + 0,9) - Q \cdot 0,5 = 0$$

Iz jednačbe ravnoteže slijedi

$$F_B = \frac{Q \cdot 0,5}{1,4} = \frac{60 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{1,4} \approx 210\text{ N}$$

Primjer 2.11. Na ručkama škara za obrezivanje voćaka, radnik djeluje silom $F = 150\text{ N}$ (slika 2.32.a.). Treba izračunati silu rezanja škara i silu u zglobu A.

Rješenje:



Slika 2.32. uz primjer 2.11.

Razmotrit ćemo ravnotežu samo jedne polovine škara, jer je za drugu analogno rješenje (slika 2.32.b). Napišimo momentnu jednadžbu za točku zgloba A

$$\sum M_A^{F_i} = F \cdot 200 - Q \cdot 30 = 0$$

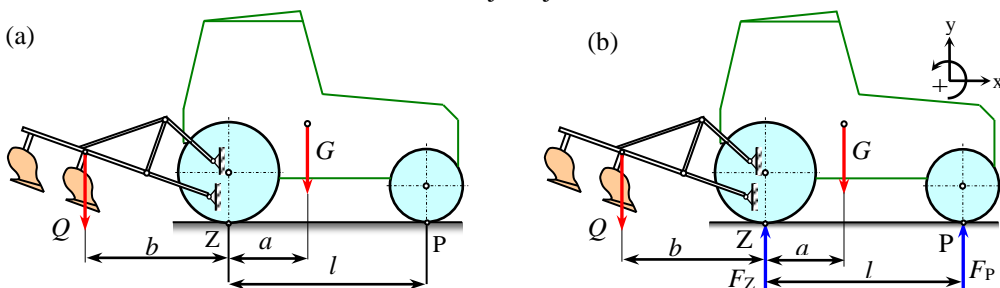
odatle je $Q = F \cdot \frac{200}{30} = 150 \cdot \frac{200}{30} = 1000 \text{ N}$

Iz sume vertikalnih sila nalazimo reakciju zgloba A

$$F_A = F + Q = 150 + 1000 = 1150 \text{ N}$$

Primjer 2.12. Odrediti reakcije prednjih i zadnjih kotača (osovine) traktora s ovješanim oruđem u stanju mirovanja (slika 2.33.). Zadano: $G = 50 \text{ kN}$, $Q = 10 \text{ kN}$, $a = 1,5 \text{ m}$, $b = 2,0 \text{ m}$, $l = 3,0 \text{ m}$.

Rješenje:



Slika 2.33. uz primjer 2.12.

Ucrtajmo reakcije na prednjem i zadnjem paru kotača (slika 2.33.b) i napišimo jednadžbe ravnoteže

$$\sum F_{iy} = -Q + F_Z - G + F_P = 0$$

$$\sum M_Z^{F_i} = Qb - Ga + F_P l = 0$$

Iz ovih jednadžbi nalazimo reakcije

$$F_P = \frac{Ga - Qb}{l} \quad \text{i} \quad F_Z = Q + G - F_P$$

Nakon uvrštenja zadanih vrijednosti slijedi $F_P \approx 18,33 \text{ kN}$ i $F_Z \approx 41,67 \text{ kN}$

Primjer 2.13. Homogena greda AB (slika 2.34.a), težine $G = 2 \text{ kN}$, lijevom krajem je zglobno vezana, a na desnom kraju opterećena silom $F = 10 \text{ kN}$. Štap se održava u horizontalnom položaju pomoću kosog štapa CD. Odrediti reakcije zgloba (čvrstog oslonca) A i reaktivnu silu štapa CD.

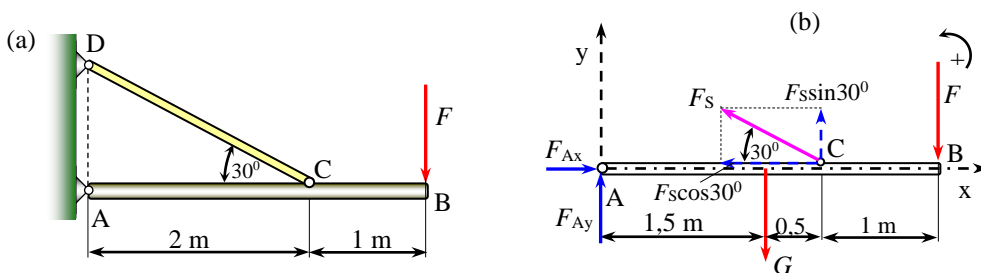
Rješenje:

Oslobodimo gredu veza (slika 2.34.b), ucrtajmo reakcije veza i napišimo jednadžbe ravnoteže:

$$\sum F_{ix} = F_{Ax} - F_S \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_{Ay} - G + F_S \sin 30^\circ - F = 0$$

$$\sum M_A^{F_i} = -G \cdot 1,5 + F_S \sin 30^\circ \cdot 2 - F \cdot 3 = 0$$

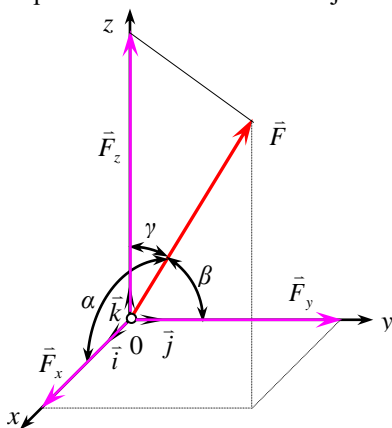


Slika 2.34. uz primjer 2.13.

Iz jednađbi ravnoteže nalazimo: $F_S = 33 \text{ kN}$, $F_{Ax} \approx 28,58 \text{ kN}$ i $F_{Ay} = -4,5 \text{ kN}$

2.12. Komponente sile u prostoru

Rješavanje mnogih problema u mehanici zahtijeva razmatranje u trodimenzionalnom prostoru. Stoga će se pokazati kako se sila rastavlja na tri međusobno okomite koordinatne osi.



Slika 2.35. Rastavljanje sile na tri međusobno okomite komponente

Prema slici 2.35. skalarne projekcije sile \vec{F} na koordinatne osi jesu:

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \cos \beta$$

$$F_z = F \cos \gamma$$

Iznos sile izraže pomoću komponenti

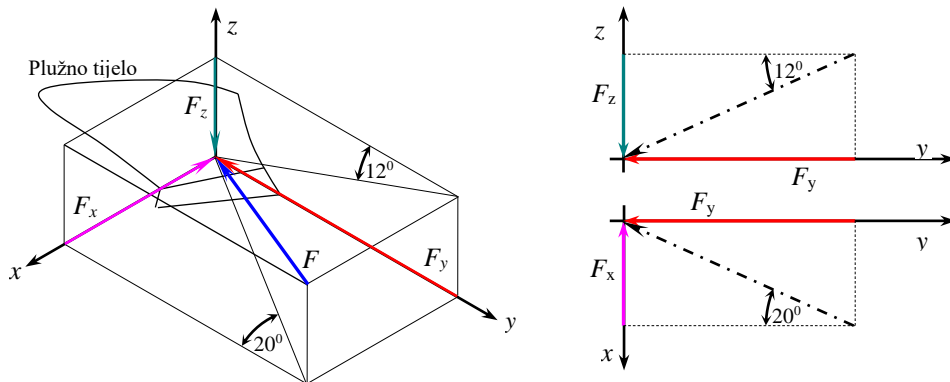
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Sila kao vektor može se zapisati u obliku

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Primjer 2.14. Odrediti iznose komponenta F_x i F_z , te ukupne sile F na pluznom tijelu ako je poznat iznos komponente $F_y = 5\,000 \text{ N}$ i kutovi prema slici 2.36.

Rješenje:



Slika 2.36. Uz primjer 2.14.

Nacrtajmo sliku 2.36.-desno, i pomoću nje odredimo tražene komponente i izračunajmo ukupnu silu F na pluznom tijelu.

$$F_x = F_y \tan 20^\circ = 5000 \cdot 0,364 = 1820 \text{ N}$$

$$F_z = F_y \tan 12^\circ = 5000 \cdot 0,213 = 1063 \text{ N} .$$

Ukupna sila iznosi

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{1820^2 + 5000^2 + 1063^2} = 5426 \text{ N} .$$

2.13. Trenje

Iz prethodnih razmatranja poznato je da dodirne idealno glatke površine imaju reakciju okomito na ravninu oslanjanja. U stvarnosti dodirne površine nisu idealno glatke, već hrapave, pa će se na dodirnim površinama u kontaktu javiti trenje. Trenje možemo shvatiti kao otpor gibanju u tangencijalnom smjeru.

Često se za trenje kaže da ono može biti štetno (u ležajevima), a korisno (kod kočnica). Danas sve manje razmišljamo o korisnosti trenja (da nema trenja čovjek ne bi mogao hodati!), a sve više o njegovim negativnim učincima, jer se prema procjeni 30 % energije u svijetu troši na savladavanje trenja. Ta činjenica, kao i nagli razvoj proizvodnje i eksploatacije strojeva, oruđa i raznovrsne tehničke opreme, osobito nakon 2. svjetskog rata, uvjetovala je stvaranje nove znanstveno - tehničke discipline nazvane **tribologija**. Ona obuhvaća opći pristup u rješavanju problema vezanih za rasipanje mase i energije u kontaktnim spojevima mehaničkih sustava.

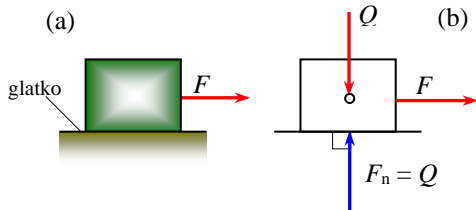
Pored površinskog trenja postoji unutarnje trenje, otpor pri gibanju molekula unutar čvrstih tijela, tekućina ili plinova. Kod čvrstih tijela, unutarnje trenje ima efekt prigušivanja vibracija i buke. Kod tekućina unutarnje trenje javlja se kao viskoznost. Prema karakteru relativnog gibanja dodirnih površina, razlikujemo trenje klizanja od trenja kotrljanja ili valjanja.

Prema stanju podmazivanja uglavnom se razlikuje suho, polusuho i tekućinsko trenje. Suho trenje je trenje dodirnih površina bez podmazivanja. Polusuho trenje je trenje dodirnih tijela koja imaju na površinama kontakta prekinuti sloj maziva. Tekućinsko ili hidrodinamičko trenje nastaje kao otpor relativnom gibanju slojeva tekućine različitim brzinama. Ova vrsta trenja vezana je za ležajeve kad je čep od posteljice odvojen kontinuiranim slojem maziva.

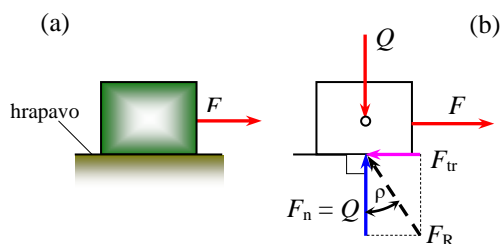
Naša razmatranja o ravnoteži sila pri trenju obuhvatit će samo suho trenje klizanja i trenje kotrljanja ili valjanja.

Trenje klizanja

Neka je blok težine Q postavljen na glatku vodoravnu podlogu (slika 2.37.a) i neka na nj djeluje horizontalna sila F . Kako su dodirne površine idealno glatke, reakcija podloge F_n bit će okomita na ravninu oslanjanja i naravno jednaka po iznosu i pravcu težini bloka Q (slika 2.37.b). Budući da sila F nije uravnotežena u horizontalnom pravcu nastat će gibanje bloka.



Slika 2.37. Reakcija glatke podloge



Slika 2.38. Reakcije hrapave podloge

Napustimo hipotezu o idealno glatkim podlogama i uzmimo u obzir realnost kontakta s hrapavim dodirnim površinama (slika 2.38.). Tada se na dodirnim hrapavim površinama javlja sila otpora gibanju koju nazivamo sila trenja.

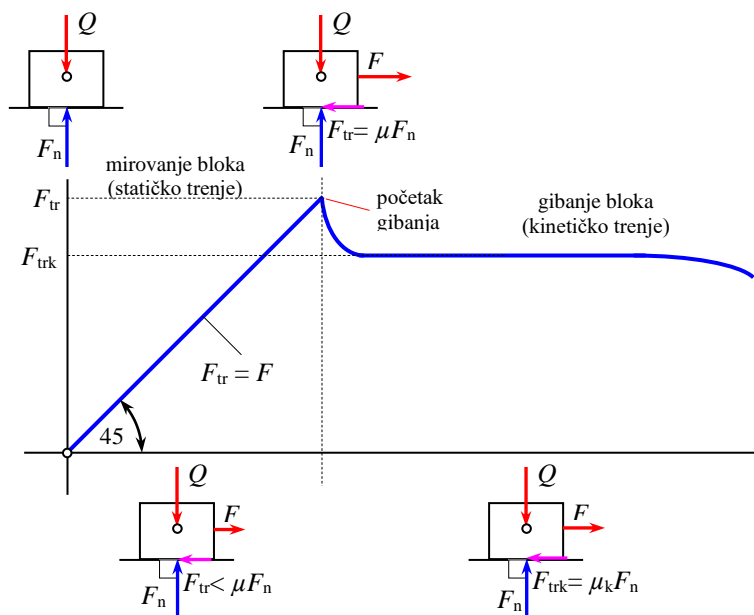
Ona je usmjerena u tangencijalnom smjeru, suprotno od smjera pomaka bloka ili nakane da se blok pomakne. Dakle, kod realnih ili hrapavih dodirnih površina pored normalne reakcije javlja se i tangencijalna reakcija ili sila trenja. Ove su dvije sile, normalna i tangencijalna, komponente ukupne reakcije hrapave podloge F_R .

Postupnim povećanjem sile F (slika 2.38.b) povećava se i s njome uravnotežavajuća sila trenja F_{tr} , a blok ostaje u stanju mirovanja. Sila trenja koja se javlja pri mirovanju tijela naziva se sila trenja mirovanja ili sila statičkog trenja. Porast sile trenja mirovanja je moguć sve do njene granične ili maksimalne vrijednosti, tj. granice ravnoteže kada se blok nalazi na granici između stanja mirovanja i gibanja. Prema tome, iznos sile trenja pri mirovanju bloka može poprimiti različite vrijednosti od ničice do najvećeg ili graničnog iznosa (u trenutku početka gibanja).

Najveća vrijednost sile trenja mirovanja F_{tr} proporcionalna je normalnoj reakciji podloge F_n sukladno Amontons-Coulombovu zakonu

$$F_{tr} = \mu F_n \quad (2.24.)$$

gdje se faktor proporcionalnosti μ (grčko slovo – mi) naziva faktor statičkog trenja ili trenja mirovanja.



Slika 2.39. Graf ovisnosti sile trenja bloka/podloga

Nakon narušavanja stanja mirovanja blok započne gibanje. Tada sila trenja dodirnih površina opadne na silu trenja gibanja ili silu kinetičkog trenja. Veza između sile kinetičkog trenja i normalne reakcije je analogna relaciji (2.24.)

$$F_{trk} = \mu_k F_n \quad (2.25.)$$

gdje je μ_k faktor ili koeficijent kinetičkog trenja, odnosno faktor trenja gibanja. Ovaj faktor je do 25 % manji od statičkog faktora trenja.

Slikovito se opisani proces pojave sile trenja između podloge i bloka može prikazati pomoću grafikona na slici 2.39. Pri velikim brzinama sila kinetičkog trenja opada, što prikazuje opadajući desni dio grafa.

Faktor trenja se određuje pokusima, a ovisi o sljedećim čimbenicima:

- stupnju hrapavosti dodirnih površina
- vrsti materijala izrade dodirnih površina
- načinu podmazanosti
- površinskom tlaku
- brzini klizanja (kod većih brzina trenje je manje)
- temperaturi.

Najutjecajniji čimbenik je hrapavost, zatim vrsta materijala i stanje podmazanosti dodirnih površina. Ostali čimbenici su manje utjecajni.

Na faktor trenja biljnih materijala utječu mnogobrojni čimbenici kao što su vlažnost, površinski tlak, brzina klizanja, vrsta dodirne površine i značajke sredine.

Približne orijentacijske vrijednosti faktora trenja za razne materijale i osnovne uvjete navedene se u tehničkim priručnicima. U tablici 2.1. navedene su ilustracijske vrijednosti faktora trenja.

Tablica 2.1. Orijentacijske vrijednosti faktora trenja

Materijali u dodiru	statički faktor trenja - μ		kinetički faktor trenja - μ_k	
	suho	podmazano	suho	podmazano
čelik - čelik	0,45 ÷ 0,80	0,1 ÷ 0,16	0,1	0,01
kovina - drvo	0,5 ÷ 0,6	0,1	0,2 ÷ 0,5	0,02 ÷ 0,08
drvo - drvo	0,4 ÷ 0,65	0,16 ÷ 0,2	0,2 ÷ 0,4	0,04 ÷ 0,16
koža - kovina	0,6	0,2	0,2 ÷ 0,25	0,12
autoguma - asfalt	0,9	-	0,8	-
čelik - led	0,027	-	0,014	-

Iz analize kontakta hrapavih površina proizlazi da normalna reakcija i sila trenja grade ukupnu reakciju podloge F_R . U graničnom slučaju ravnoteže (slika 2.38.b) pravac je ukupne reakcije F_R otklonjen od normalne reakcije F_n za kut trenja ρ (grčko slovo – ro).

Iz pravokutnika sila na slici 2.36.b proizlazi da je

$$\tan \rho = \frac{F_{tr}}{F_n} = \frac{\mu F_n}{F_n} = \mu \quad \text{odnosno} \quad \tan \rho = \mu \quad (2.26.)$$

Dakle, tangens kuta statičkog trenja jednak je faktoru statičkog trenja. Analogno bi odgovaralo i za uvjete gibanja.

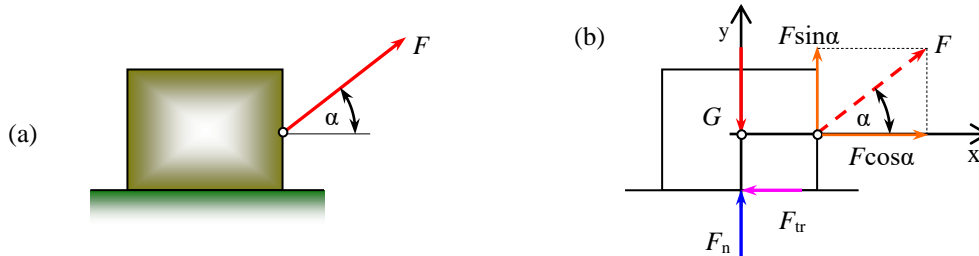
$$\tan \rho_k = \mu_k \quad (2.27.)$$

Budući da je kinetički faktor trenja μ_k manji od kuta statičkog trenja μ , to je i kut kinetičkog trenja ρ_k manji od kuta statičkog trenja ρ .

Prirodni kut nagiba sipkih materijala (pijesak, žitarice, mineralno gnojivo) upravo je jednak kutu trenja za taj materijal. Kut trenja tada odgovara nasipnom kutu koji se može izmjeriti i u prirodnim uvjetima.

Primjer 2.15. Sanduk težine $G = 1000$ N treba pokrenuti po vodoravnoj podlozi silom F koja s podlogom zatvara kut $\alpha = 30^\circ$. Odrediti iznos sile F ako je faktor statičkog trenja $\mu = 0,2$.

Rješenje:



Slika 2.40. uz primjer 2.15.

Oslobodimo sanduk veza, ucrtajmo reakcije i koordinatni sustav (slika 2.40.b), te napišimo jednadžbe ravnoteže

$$\sum F_{ix} = F \cos \alpha - F_{tr} = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_n + F \sin \alpha - G = 0$$

Uz $F_{tr} = \mu F_n$, te nakon sređivanja i uvrštavanja, nalazimo iznos sile za pokretanje sanduka

$$F = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = \frac{0,2 \cdot 1000}{\cos 30^\circ + 0,2 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{200}{0,866 + 0,2 \cdot 0,5} \approx 207 \text{ N}$$

Primjer 2.16. Na vratilo djeluje okretni moment $M = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$. Kolo za kočenje ima promjer $d = 400 \text{ mm}$. Kolika mora biti pritisna sila F na papučama da se vratilo ukoči ako je $\mu = 0,25$.

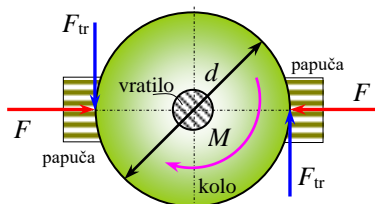
Rješenje:

Par sila trenja $F_{tr} = \mu F$, čine spreg sila trenja, čiji je moment jednak okretnom momentu;

$$M = \mu F d$$

Oдавde slijedi pritisna sila

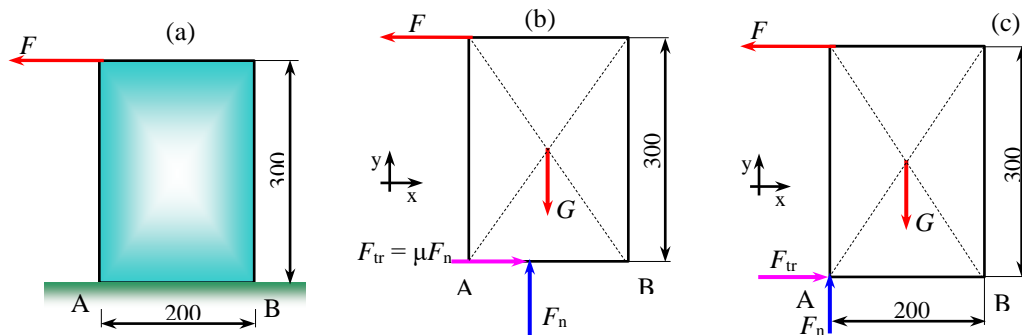
$$F = \frac{M}{\mu d} = \frac{500}{0,25 \cdot 0,4} = 5\,000 \text{ N}$$



Slika.2.41. uz primjer 2.16.

Primjer 2.17. Na blok dimenzija prema slici 2.42.a i težine 900 N, djeluje sila F . Ako je faktor trenja između bloka i podloge 0,2, hoće li prije doći do klizanja ili prevrtanja bloka?

Rješenje:



Slika 2.42. uz primjer 2.17.

a) *Klizanje bloka.* Oslobodimo blok veza (slika 2.42.b), ucrtajmo normalnu reakciju i silu trenja te napišimo jednadžbe ravnoteže

$$\sum F_{ix} = -F + F_{tr} = 0$$

$$\sum F_{iy} = F_n - G = 0$$

Rješavanjem jednadžbi uz poznatu relaciju $F_{tr} = \mu F_n$ nalazimo silu F klizanju bloka po podlozi

$$F = \mu G = 0,2 \cdot 500 = 100 \text{ N}$$

b) *Prevrtnanje bloka.* Pretpostavimo da će doći do prevrtanja oko točke A (slika 2.42.c). Napišimo momentnu jednadžbu za točku A

$$\sum M_A^{F_i} = F \cdot 0,3 - G \cdot 0,1 = 0$$

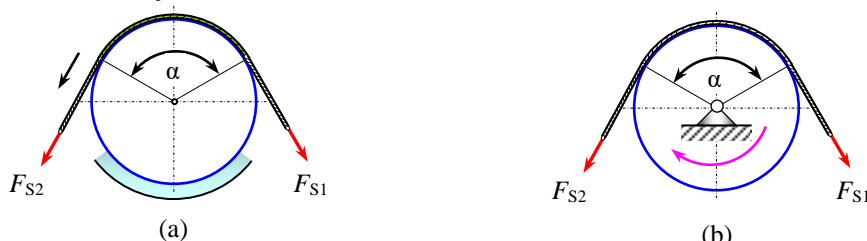
odavde je sila za prevrtanje

$$F_{pr} = \frac{G \cdot 0,1}{0,3} = \frac{500 \cdot 0,1}{0,3} \approx 167 \text{ N}$$

Dakle, budući da je sila za klizanje manja, prije će doći do klizanja nego prevrtanja bloka.

Trenje užeta

Trenje klizanja između čvrstog i savitljivog tijela (užeta) znatno se drugačije očituje od dosad razmatranog trenja klizanja. Klizanje po nepomičnom valjku (slika 2.43.a) moguće je samo ako je sila u užetu F_{S2} veća od sile u drugom kraku užeta F_{S1} i sile trenja na kontaktnom luku između užeta i valjka.



Slika 2.43. Trenje užeta o nepomični (a) i pomični (b) valjak

Odnos između sila F_{S2} i F_{S1} iskazuje se poznatom Eulerovom (čit. Ojler) formulom

$$F_{S2} = F_{S1} e^{\mu\alpha} \quad (2.28.)$$

gdje je α - obuhvatni kut užeta, izražen u radijanima

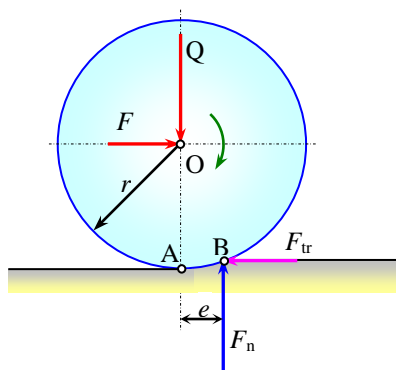
μ - statički faktor trenja između užeta i valjka

$e \approx 2,718$ - baza prirodnih logaritama.

Ista formula odgovara i za primjer kada uže miruje, a valjak rotira, giba se (slika 2.43.b).

Trenje kotrljanja (valjanja)

Otpor pri kotrljanju ili valjanju jednog tijela po drugome nastaje zbog deformacija kotrljajućih površina u području dodira. Pojednostavljeno rečeno, posljedica toga je pomicanje, suprotno od smjera rotacije, normalne reakcije F_n od pravca opterećenja Q (sl.2.44.). Razmak između pravaca reakcije i opterećenja, naziva se krak trenja kotrljanja e .



Slika 2.44. Reakcije pri kotrljanju po deformabilnoj podlozi

Omjer između sile F potrebne za svladavanje trenja kotrljanja i normalne reakcije podloge, $F_n = Q$, naziva se faktor kotrljanja f .

$$f = \frac{F}{F_n} = \frac{F}{Q} \quad \text{odnosno} \quad F = fQ$$

Moment trenja kotrljanja jednak je umnošku reakcije podloge F_n i kraka trenja kotrljanja e ,

$$M_k = F_n e \quad \text{ili} \quad M_k = Q e \quad (2.29.)$$

Veza između faktora trenja kotrljanja i kraka trenja kotrljanja može se postaviti u obliku

$$f = \frac{e}{r} \quad (2.30.)$$

Za kotrljanje valjka bez klizanja, sila trenja kotrljanja, odnosno sila F koja vuče valjak, mora biti manja ili eventualno jednaka sili statičkog trenja klizanja F_{tr} .

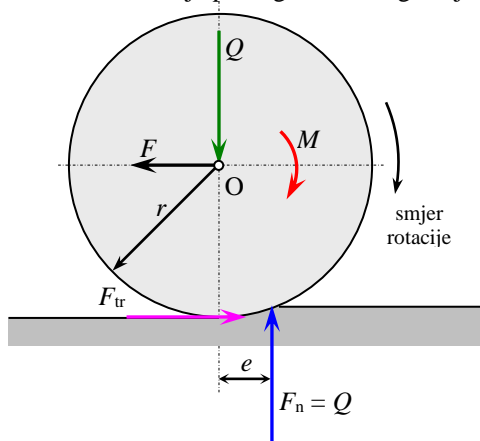
$$F = fQ \leq F_{tr} = \mu Q$$

odavde slijedi $f \leq \mu$.

Dakle, kotrljanje je moguće, bez klizanja, samo ako je faktor trenja kotrljanja f manji ili jednak faktoru statičkog trenja klizanja μ .

Trenje kotrljanja je u načelu znatno manje od trenja klizanja, pa se time objašnjava težnja u tehničkoj praksi zamjene klizanja kotrljanjem gdje god je to moguće.

Kotač se smatra jednim od najvažnijih izuma u povijesti naše civilizacije. On je sastavni dio mnogobrojnih transportnih vozila i radnih strojeva. Kao **ilustrativni primjer** detaljnije ćemo analizirati kotrljanje pogonskog **kotača** po deformabilnoj podlozi (slika 2.43.). Pomak kotača u smjeru rotacije nastaje zbog pogonskog momenta M . Na kotač djeluju sljedeće sile: Q – dio težine vozila koja otpada na kotač (nazvane adhezijska težina vozila), F – vučna sila, F_n – normalna reakcija podloge, F_{tr} – tangencijalna reakcija podloge.



Slika 2.45. Trenje na kotaču

Zbroj vodoravnih i okomitih sila te momenata sila oko točke O daje tri jednadžbe:

$$\begin{aligned} F_{tr} &= F \\ F_n &= Q \\ M &= F_n e + F_{tr} r. \end{aligned}$$

Iz zadnje jednadžbe slijedi

$$F_{tr} = \frac{M}{r} - \frac{e}{r} Q \quad (2.31.)$$

Kvocijent M/r je pogonska sila na obodu kotača F_o , ponegdje nazvana i bruto trakcija.

Drugi član jednadžbe (2.31.) je sila trenja kotrljanja $F_f = fQ$.

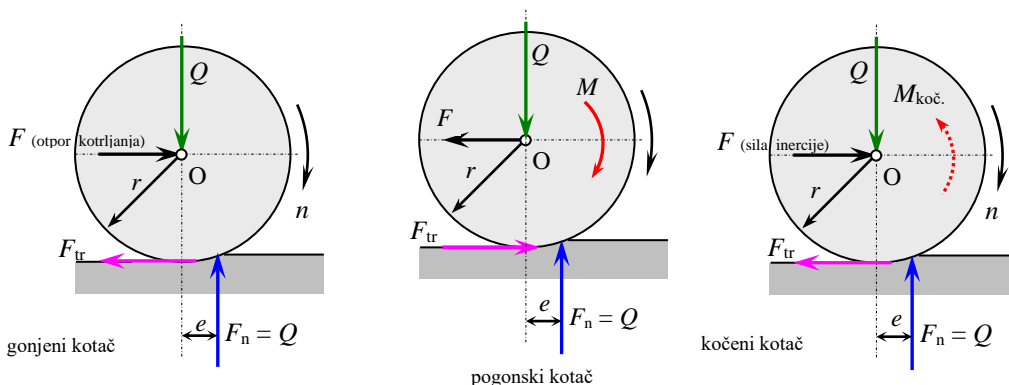
Dakle, tangencijalna sila je $F_{tr} = F_o - F_f$, često nazvana neto trakcija ili vučna sila. Iznos tangencijalne sile F_{tr} mora biti manji ili jednak umnošku faktora prijanjanja φ (grčko slovo - fi) između kotača i podloge i opterećenja Q , tj. $F_{tr} \leq \varphi Q$ ili $F_o - F_f \leq \varphi Q$, odnosno

$$F_o = \varphi Q + f Q = (\varphi + f) Q. \tag{2.32}$$

Faktor prijanjanja φ (malo se razlikuje od faktora trenja) ovisi o tri skupine čimbenika: pneumaticima kotača (veličina, oblici, materijal, oblik profila, istrošenost), podlozi (priroda podloge, vlažnost, površina, masnoća, snijeg, led, temperatura) i spoju pneumatik-podloga (opterećenje, brzina klizanja, pravac klizanja).

S obzirom na veličinu i smjer tangencijalne sile F_{tr} razlikuju se tri posebna primjera kotrljanja kotača (slika 2.46.):

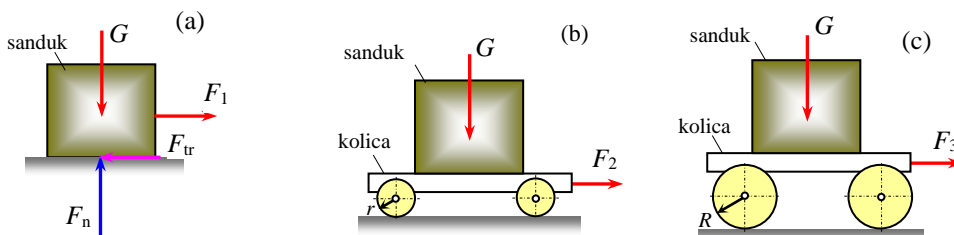
- za $F_{tr} > 0$ i $M > Q \cdot e$ - kotač je pogonski
- za $F_{tr} = -\frac{e}{r} Q$ i $M = 0$ - kotač je gonjeni pa je potrebno upotrijebiti silu F u smjeru gibanja za vuču kotača
- za $F_{tr} < 0$ i $M < 0$ - kotač je kočen momentom $M_{koč}$.



Slika 2.46. Vrste kotača u kotrljanju

Primjer 2.18. Radi usporedbe, odrediti iznos horizontalne sile potrebne za pokretanje sanduka teškog $G = 1\ 000\ \text{N}$ u tri slučaja. U prvom slučaju radi se o klizanju sanduka na podlozi ($\mu = 0,2$), drugi i treći slučaj je kotrljanje pomoću kotača polujera $r = 50\ \text{mm}$, odnosno $R = 200\ \text{mm}$ uz krak trenja kotrljanja $e = 1\ \text{mm}$.

Rješenje:



Slika 2.47. uz primjer 2.18.

Trenje klizanja: $F_1 = F_{tr} = \mu G = 0,2 \cdot 1000 = 200 \text{ N}$

Trenje kotrljanja: $F_2 = \frac{e}{r} G = \frac{1}{50} 1000 = 20 \text{ N}$

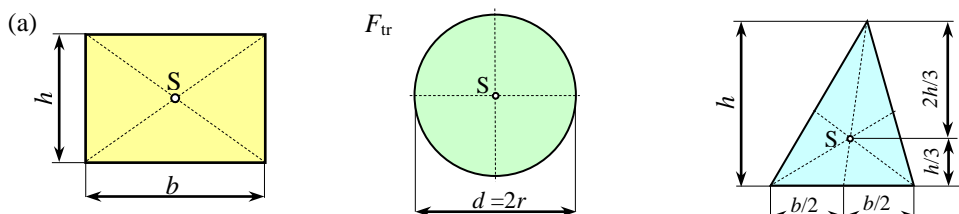
$$F_3 = \frac{e}{R} G = \frac{1}{200} 1000 = 5 \text{ N}$$

2.13. Težište

Zbog djelovanja Zemljinog gravitacijskog polja, sile privlačenja pojedinih čestica tijela usmjerene su približno prema središtu Zemlje. Budući su dimenzije bilo kojeg tijela male u odnosu s polumjerom Zemlje ($R \approx 6\,371 \text{ km}$), privlačne ili gravitacijske sile možemo smatrati međusobno paralelnim. Rezultanta tih paralelnih sila jednaka je njihovoj zbroju i naziva se težina tijela. Hvatište rezultante (težine) je u središtu skupa paralelnih gravitacijskih sila koje se naziva težište tijela. Položaj težišta tijela može se odrediti analitički ili eksperimentalno.

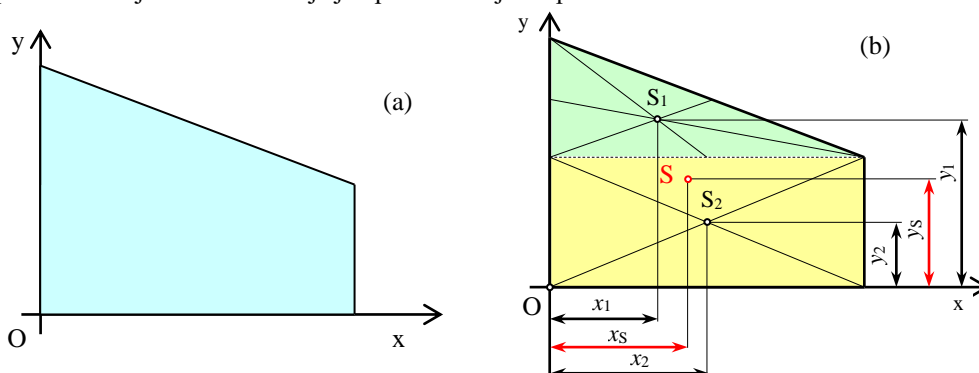
a) Analitički način određivanja težišta ravnih likova

Složeni ravni likovi sastavljeni su od jednostavnih geometrijskih likova, kao što su pravokutnik, kvadrat, trokut, krug, polukrug. Težište pravokutnika je u sjecištu dijagonala (slika 2.48.a). Težište je kruga u središtu kružnice (slika 2.48.b). Težište trokuta je u sjecištu težišnica; dužina spuštenih iz vrhova trokuta na polovišta nasuprotnih stranica. Težište S (slika 2.48.c) nalazi se na udaljenosti $\frac{1}{3} h$ od osnovice ili $\frac{2}{3} h$ od nasuprotnog vrha trokuta.



Slika 2.48. Težište pravokutnika (a), kruga (b), trokuta (c) i polukruga

Primjenom Varignonova poučka mogu se odrediti koordinate položaja težišta složenih ravnih likova. Neka je složena površina u obliku trapeza (slika 2.49.) sastavljenog od trokuta i pravokutnika. Prema prethodno rečenom nacrtamo težište trokuta i pravokutnika. Svakoj površini dodijelimo težinu koja je upravo razmjerna površini lika.



Slika 2.49. Težište složenog lika

Položaj težišta rezultante nalazi se primjenom Varignonova poučka.

$$A x_S = A_1 x_1 + A_2 x_2$$

odavde je

$$x_S = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A} \quad (2.33.)$$

Analogno bi našli

$$y_S = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} \quad (2.34.)$$

Opći izraz za određivanje položaja težišta lika sastavljenog iz više jednostavnih likova je

$$x_S = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad \text{i} \quad y_S = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} \quad (2.35.)$$

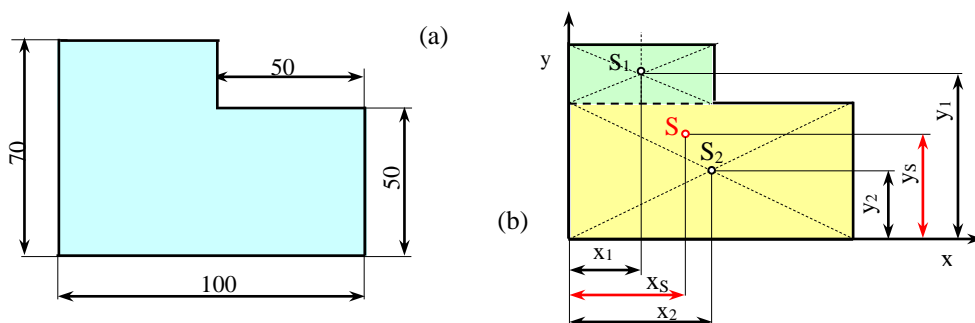
gdje je: A_i - površina i - tog lika

x_i, y_i - koordinate težišta i - tog lika

$\sum A_i = A$ - ukupna površina složenog lika.

Primjer 2.19. Odrediti težište sastavljenog lika prikazanog na slici 2.50.

Rješenje:



Slika 2.50. uz primjer 2.19.

Koordinate težišta pojedinih likova

$$x_1 = 25 \text{ mm} \quad y_1 = 50 + \frac{20}{2} = 50 + 10 = 60 \text{ mm}$$

$$x_2 = 50 \text{ mm} \quad y_2 = 25 \text{ mm}$$

Površine pojedinih likova

$$A_1 = 20 \cdot 50 = 1000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 100 \cdot 50 = 5000 \text{ mm}^2$$

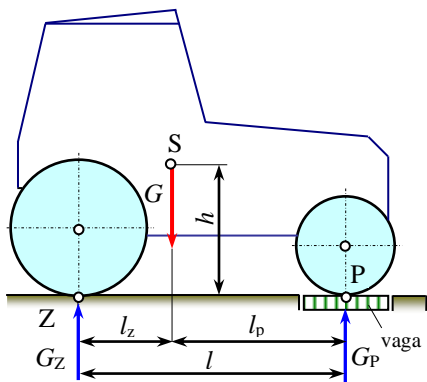
Koordinate težišta sastavljenog lika (2.33)

$$x_S = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{1000 \cdot 25 + 5000 \cdot 50}{1000 + 5000} = \frac{25000 + 250000}{6000} \approx 45,83 \text{ mm}$$

$$y_S = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1000 \cdot 60 + 5000 \cdot 25}{1000 + 5000} = \frac{60000 + 125000}{6000} \approx 30,83 \text{ mm}$$

b) Eksperimentalno određivanje težišta

Položaj težišta tijela složene konfiguracije (automobila, traktora, plugova, kamiona, kombajna, zrakoplova, itd.) određuje se vaganjem. Za utvrđivanje koordinata položaja težišta traktora potrebno je izvršiti vaganje, na primjer, prednjeg para kotača ili prednje osovine (slika 2.51.).



Slika 2.51. Težište traktora

Nakon što saznamo odvagu ili izmjeru na vagi i raspona prednjih i zadnjih kotača, možemo napisati momentnu jednadžbu za kontaktnu točku Z, ispod zadnjeg para kotača.

$$\sum M_Z^{F_i} = -G \cdot l_z + G_p \cdot l = 0$$

Iz momentne jednadžbe nalazimo udaljenost težišta S od zadnjeg para kotača

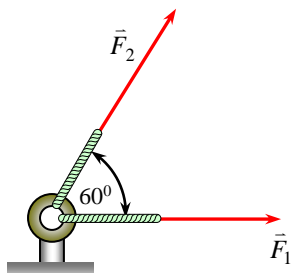
$$l_z = \frac{G_p}{G} l \tag{2.36.}$$

gdje je G - težina traktora, G_p - odvaga (izmjera) na prednjem paru kotača, l raspon između prednjeg i zadnjeg para kotača.

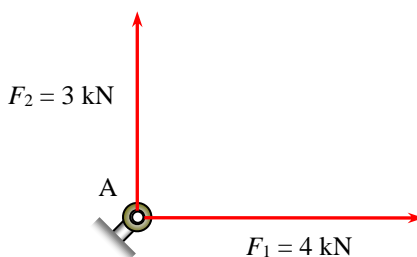
Postoje razrađene metode eksperimentalnog određivanja položaja težišta u poprečnoj i vertikalnoj ravnini vozila i poljoprivrednih strojeva.

Zadaci – statika krutih tijela

Zadatak 2.1. Crtanjem paralelograma i trokuta sila odredite iznos rezultante sila $F_1 = 200$ N i $F_2 = 300$ N. Uzmite mjerilo 50 N $\hat{=}$ 1 cm. (Odgovor: $F_R = 436$ N)

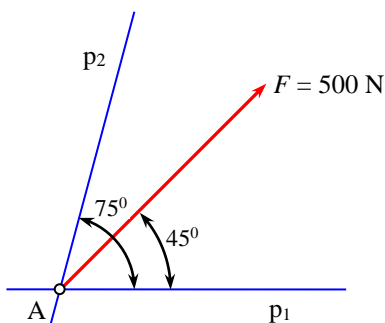


Zadatak 2.1.

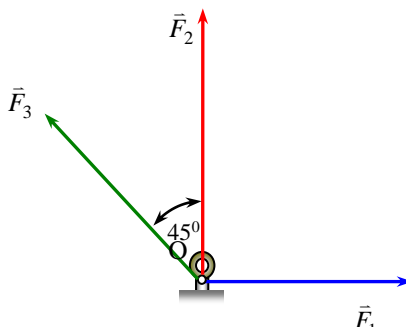


Zadatak 2.2.

Zadatak 2.2. Odrediti iznos rezultante zadanih sila primjenom Pitagorina poučka. Koliki je kut između rezultante i sile F_1 ? (Odgovor: $F_R = 5$ kN ; $\alpha_1 = 36,9^0$)



Zadatak 2.3.

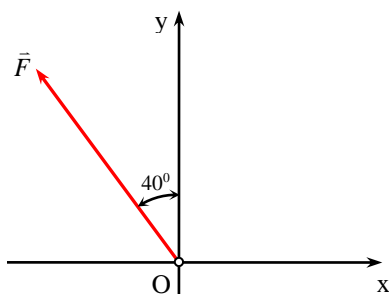


Zadatak 2.4.

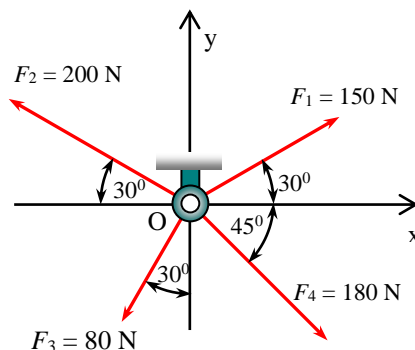
Zadatak 2.3. Rastavite silu $F = 500 \text{ N}$ na komponente u pravcima p_1 i p_2 . Primijenite sinusov poučak. (Odgovor: $F_1 = 258,8 \text{ N}$; $F_2 = 366,0 \text{ N}$)

Zadatak 2.4. Crtanjem poligona sila odredite iznos rezultante triju sila $F_1 = 3 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$ i $F_3 = 2,5 \text{ kN}$. Uzmite mjerilo $1 \text{ kN} \hat{=} 1 \text{ cm}$. (Odgovor: $F_R \approx 5,9 \text{ kN}$)

Zadatak 2.5. Nacrtajte, označite i napišite čemu je jednaka projekcija sile $F = 500 \text{ N}$ na os x i y . (Odgovor: $F_x = -321,4 \text{ N}$; $F_y = 383,0 \text{ N}$)



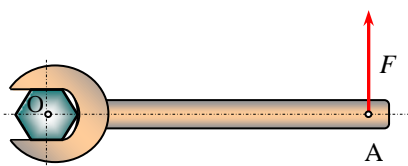
Zadatak 2.5.



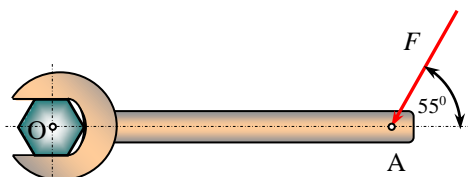
Zadatak 2.6.

Zadatak 2.6. Odrediti rezultantu prikazanog skupa sila po iznosu i orijentaciji. (Odgovor: $F_R = 48,95 \text{ N}$; $\alpha_R = 333,9^\circ$)

Zadatak 2.7. Odrediti moment sile $F = 360 \text{ N}$ s obzirom na točku O , ako je poznata dužina ručice ključa $OA = 250 \text{ mm}$. (Odgovor: $M_O^F = 90 \text{ N}\cdot\text{m}$)

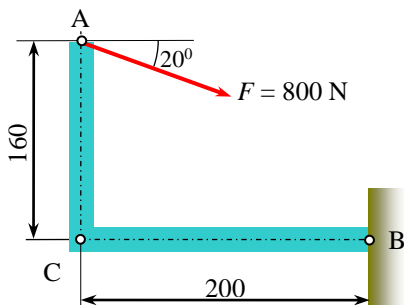


Zadatak 2.7.

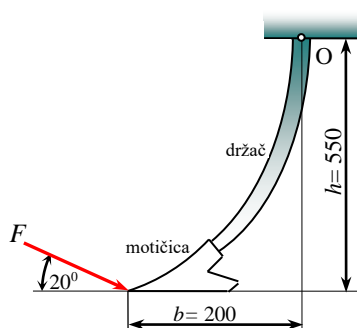


Zadatak 2.8.

Zadatak 2.8. Odrediti moment sile $F = 360 \text{ N}$ s obzirom na točku O , ako je poznata dužina ručice ključa $OA = 250 \text{ mm}$. (Odgovor: $M_O^F \approx -73,7 \text{ N}\cdot\text{m}$)



Zadatak 2.9.-2.10.



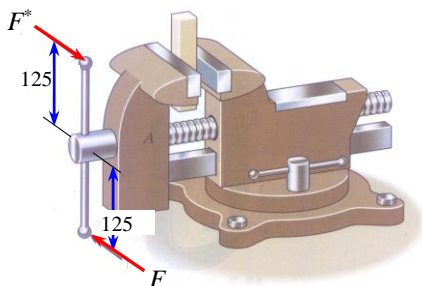
Zadatak 2.11.

Zadatak 2.9. Odrediti iznos momenta sile F za točku B . (Odgovor: $M_B^F = -65,6 \text{ N}\cdot\text{m}$)

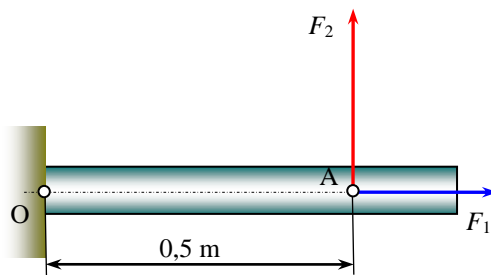
Zadatak 2.10. Odrediti iznos momenta sile F za točku C. (Odgovor: $M_C^F = -120,3 \text{ N}\cdot\text{m}$)

Zadatak 2.11. Koliki je za točku O moment sile $F = 250 \text{ N}$ koja djeluje na motičicu kultivatora? (Odgovor: $M_O^F \approx 146,3 \text{ N}\cdot\text{m}$)

Zadatak 2.12. Ako radnik djeluje na ručke stezača silom $F = 100 \text{ N}$, koliki je moment na navojnom vretenu stezača? (Odgovor: $M = 25 \text{ N}\cdot\text{m}$)



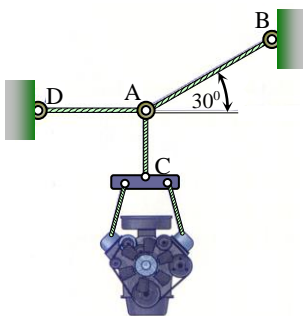
Zadatak 2.12.



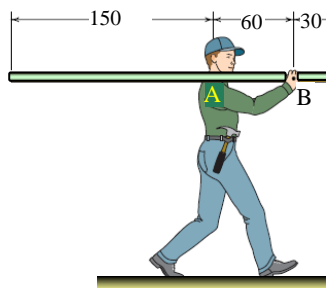
Zadatak 2.13.

Zadatak 2.13. Na homogeni nosač duljine 700 mm i težine 9 kN u točki A djeluju dvije sile; $F_1 = 8 \text{ kN}$ i $F_2 = 15 \text{ kN}$. Izvršite redukciju svih sila u točku O, ucrtajte i označite čemu je jednak ekvivalentan zadani skup sila. (Odgovor: $F_R = 10 \text{ kN}$; $M_O = 4,35 \text{ kN}\cdot\text{m}$)

Zadatak 2.14. Osloboditi čvorište A veza, odnosno ucrtajte reakcije veza u užadima.



Zadatak 2.14.

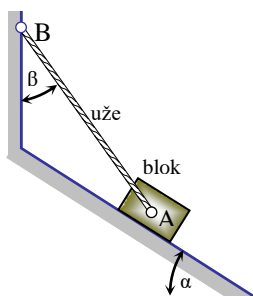


Zadatak 2.15.

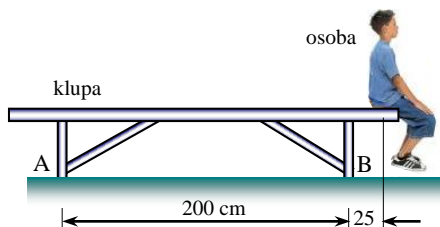
Zadatak 2.15. Radnik nosi homogenu gredicu težine 60 N. Oslobodite gredicu veza i ucrtajte reakcije ramena u točki A i silu kojom radnik pridržava gredicu u točki B.

Zadatak 2.16. Na glatkoj kosini, koja zatvara s horizontalom kut $\alpha = 30^\circ$, miruje blok težine $G = 100 \text{ N}$, vezan užetom AB, koje s vertikalnom stijenom zatvara kut $\beta = 45^\circ$. Odrediti silu u užetu i reakciju kosine. (Odgovor: $F_S = 51,8 \text{ N}$; $F_n = 73,2 \text{ N}$)

Zadatak 2.17. Na desni kraj klupe težine $Q = 200 \text{ N}$ sjela je osoba težine $G = 700 \text{ N}$ prema slici. Odrediti reakcije nogara klupe u A i B. Koliku težinu treba imati osoba da bi reakcija u A bila jednaka nuli? (Odgovor: $F_A = 12,5 \text{ N}$, $F_B = 887,5 \text{ N}$; $G = 800 \text{ N}$)

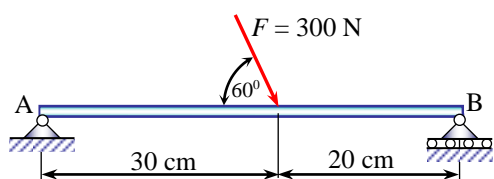


Zadatak 2.16.

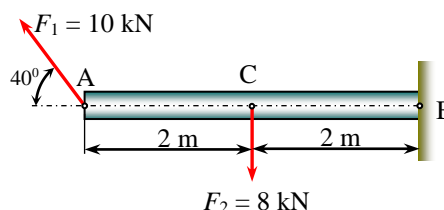


Zadatak 2.17.

Zadatak 2.18. Odrediti reakcije u osloncima nosača oslonjenog i opterećenog prema slici. (Odgovor: $F_A \approx 183 \text{ N}$; $F_B \approx 156 \text{ N}$)



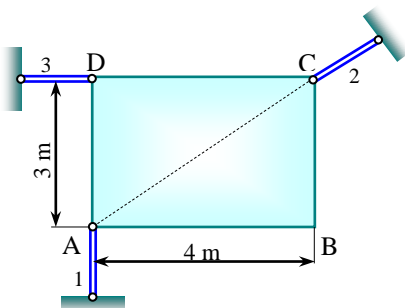
Zadatak 2.18.



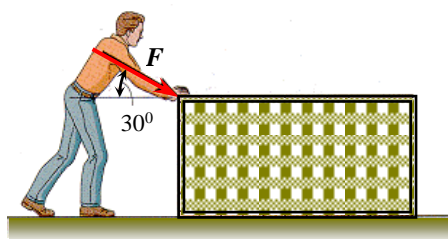
Zadatak 2.19.

Zadatak 2.19. Uklješteni horizontalni štap opterećen je zadanim silama prema slici. Odrediti reakcije uklještenja B. (Odgovor: $F_B = 7,82 \text{ kN}$; $M_B = 9,72 \text{ kN}\cdot\text{m}$)

Zadatak 2.20. Pravokutna ploča ABCD težine $G = 9 \text{ kN}$ pridržava se s tri štapa prema slici. Odrediti sile u štapovima. (Odgovor: $F_{S3} = 6 \text{ kN}$, $F_{S2} = 7,5 \text{ kN}$ i $F_{S1} = 4,5 \text{ kN}$)



Zadatak 2.20.

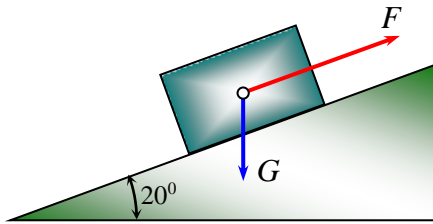


Zadatak 2.21.

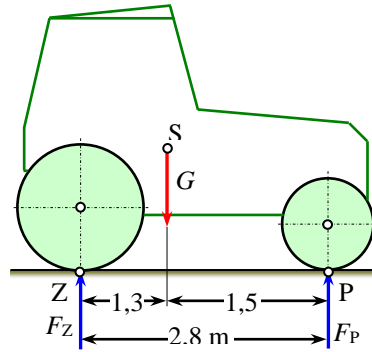
Zadatak 2.21. Čovjek gura sanduk mase 30 kg silom F konstantnog pravca. Odrediti iznos sile F ako je faktor statičkog trenja sanduk/podloga $\mu = 0,6$. (Odgovor: $F \approx 312 \text{ N}$)

Zadatak 2.22. Koliku silu F treba upotrijebiti da bi se blok težine 600 N vukao uz kosinu ako je faktor trenja između bloka i kosine $0,3$? (Odgovor: $F \approx 374,3 \text{ N}$)

Zadatak 2.23. Traktor mase $4\,000 \text{ kg}$ ima zadnje kotače promjera 150 cm i prednje kotače 70 cm . Krak trenja kotrljanja za prednje i zadnje kotače iznosi 5 cm . Odrediti ukupnu silu otpora kotrljanja traktora. (Odgovor: $F_{kot} = 4\,004 \text{ N}$)

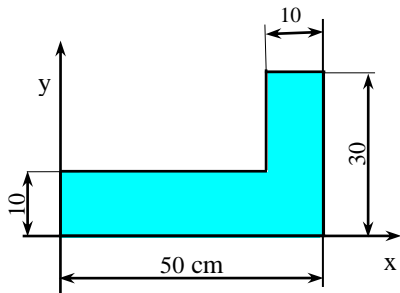


Zadatak 2.22.



Zadatak 2.23.

Zadatak 2.24. Odrediti koordinate težišta lika prikazanog na slici. (Odgovor: $x_S = 30,7$ cm ; $y_S = 9,3$ cm)



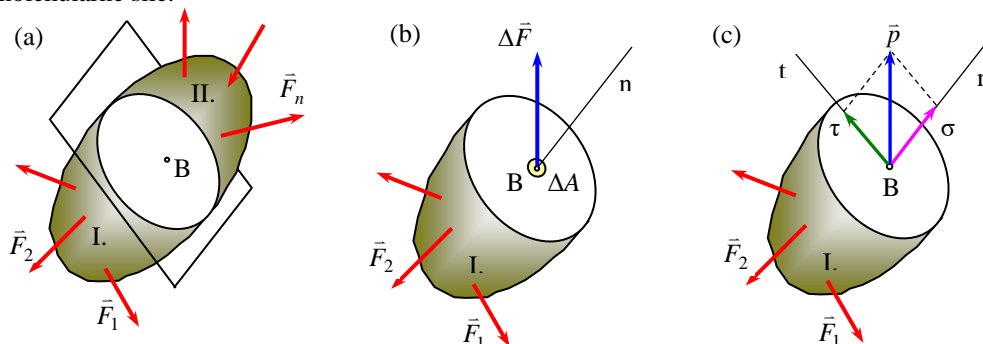
Zadatak 2.24.

3. STATIKA ČVRSTIH DEFORMABILNIH TIJELA

Svako se prirodno čvrsto tijelo pod djelovanjem vanjskih sila (opterećenja) deformira tj. mijenja svoj oblik, pri čemu se u tijelu pojavljuju unutarnje sile. Za opisivanje promjene oblika tijela definira se pojam deformacija, a intenzivnosti unutarnjih sila pojam naprezanja.

3.1. Naprezanje

Promotrimo čvrsto tijelo (slika 3.1.) na koje djeluje uravnotežen skup vanjskih sila F_1, F_2, \dots, F_n . Djelovanjem opterećenja nastaju pomaci između čestica tijela. Tome se opiru unutarnje, molekularne sile.



Slika 3.1. Vektor naprezanja i njegove komponente

Zamislamo da smo tijelo prerezali na dva dijela (I. i II.) nekom ravninom kroz točku B. Ako odbacimo dio II. a zadržimo I., očito će na dijelu I. sile biti u ravnoteži ako se djelovanje vanjskih sila s dijela II. zamijeni djelovanjem unutarnjih sila u presjeku.

Neka na elementnoj površini ΔA , koja obuhvaća točku B, djeluje elementna unutarnja sila $\Delta\vec{F}$. Omjer unutarnje sile $\Delta\vec{F}$ i elementarne površine ΔA naziva se vektorom srednjeg naprezanja. Granična vrijednost omjera $\Delta\vec{F}/\Delta A$, kad elementarna površina ΔA težeći nuli, stalno sadržava točku B, definira vektor naprezanja u toj točki

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} \quad (3.1.)$$

Vektor naprezanja \vec{p} može se rastaviti na normalno i tangencijalno naprezanje (slika 3.1.c).

Dakle, unutarnje sile svedene na element površine proizvoljnog presjeka, daju vektor naprezanja \vec{p} , koji u svakoj točki tog presjeka ima normalnu (okomitu na ravninu presjeka) i posmičnu ili tangencijalnu komponentu (leži u ravnini presjeka).

Normalna komponenta označava se grčkim slovom σ (sigma), a posmična ili tangencija komponenta grčkim slovom τ (tau).

Normalno naprezanje suprostaavlja se promjeni razmaka među česticama materijala, dok se posmično naprezanje opire klizanju jednog sloja materijala čestica po drugome.

Jedinica za mjerenje naprezanja, dobije se dijeljenjem jedinice za silu s jedinicom za površinu.

$$\text{jedinica naprezanja} = \frac{\text{njutn}}{\text{kvadratni metar}} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

U Međunarodnom sustavu mjernih jedinica (SI) za mjerenje tlaka i naprezanja definira se jedinica paskal (znak: Pa) kao njutn po kvadratnom metru, $\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$. Kako je jedinica N/m^2 , odnosno Pa, isuviše mala, najčešće se koriste decimalne jedinice:

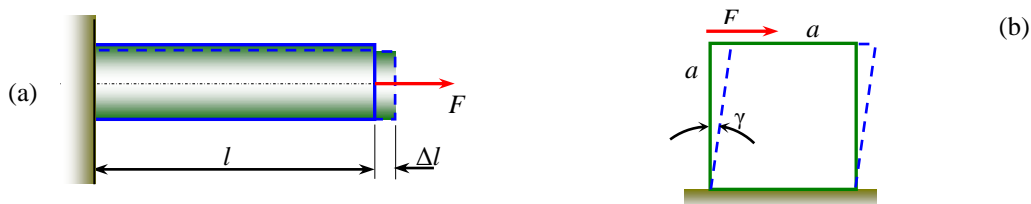
$$\text{kPa} = \text{kN}/\text{m}^2 = 10^3 \text{ Pa}$$

$$\text{MPa} = \text{MN}/\text{m}^2 = \text{N}/\text{mm}^2 = 10^6 \text{ Pa}$$

$$\text{GPa} = \text{GN}/\text{m}^2 = \text{kN}/\text{mm}^2 = 10^9 \text{ Pa}$$

3.2. Deformacije

Već smo kazali, da zbog djelovanja vanjskih sila, tijelo mijenja svoj oblik i dimenzije. Ta deformiranost sastoji se u promjeni dužine (slika 3.2.a) i promjeni pravog kuta (slika 3.2.b). Prva je duljinska (rastezanje ili sabijanje) a druga kutna deformacija.



Slika 3.2. Duljinska i kutna deformacija tijela

Na slici 3.2. prikazan je štap dužine l , odnosno kockica stranica a , prije opterećenja silama. Za vrijeme opterećenja duljina štapa povećala se za Δl - apsolutno produljenje.

Omjer između apsolutnog produljivanja (skraćanja) i prvobitne dužine je duljinska deformacija ili relativno produljenje. Duljinska deformacija označava se grčkim slovom ε (epsilon).

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.2.)$$

Kutna deformacija γ (slika 3.2.b) opisuje promjenu pravoga kuta među okomitim dužinama, zbog opterećenja. Ona je pozitivna ako se pravi kut smanjuje, odnosno, negativna, ako se pravi kut uvećava.

Na kraju recimo, da je duljinska deformacija ε povezana s normalnim naprezanjem σ , a kutna deformacija γ s tangencijalnim naprezanjem τ . Duljinska deformacija je bezdimenzionalna veličina, a kutna deformacija mjeri se u radijanima.

3.3. Hookeov zakon, dijagram rastezanja i dopušteno naprezanje

Temeljni zakon statike čvrstih deformabilnih tijela je Hookeov (čit. Huk) zakon, koji glasi: naprezanje je proporcionalno deformaciji.

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.3.)$$

Faktor proporcionalnosti je modul elastičnosti E , koji ovisi o vrsti materijala. Modul elastičnosti mjeri se, kao i naprezanja, u N/m^2 . On je zamišljeno naprezanje, koje bi se javilo u štapu, kad bi se njegova duljina dvostruko povećala u elastičnom području deformacija.

Analogno se može zapisati veza između tangencijalnog naprezanja i kutne deformacije.

$$\tau = G \gamma \quad (3.4.)$$

gdje je: G - modul klizanja ili smicanja, a mjeri se kao i modul elastičnosti u N/m^2

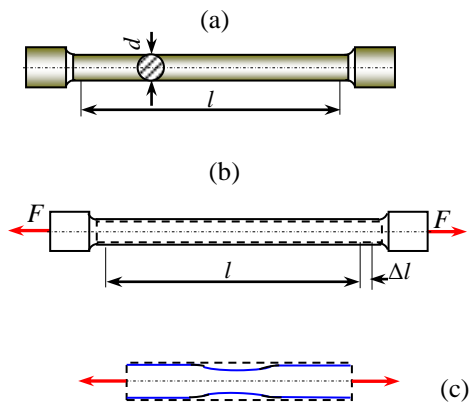
Tablica 3.1. Modul elastičnosti i modul smicanja materijala

Materijali	E	G	Materijali	E	G
	GPa = kN/mm ²	GPa = kN/mm ²		GPa = kN/mm ²	GPa = kN/mm ²
Čelik	200 ÷ 210	80 ÷ 81	Staklo	56	22
Bakar	84 ÷ 130	40 ÷ 49	Beton	15 ÷ 40	-
Bronca	105 ÷ 115	40 ÷ 42	Guma	0,01	-
Aluminij	70 ÷ 71	26 ÷ 27	Drvo	9 ÷ 14	0,45 ÷ 0,65
Olovo	17	7	Pluto	0,06	-

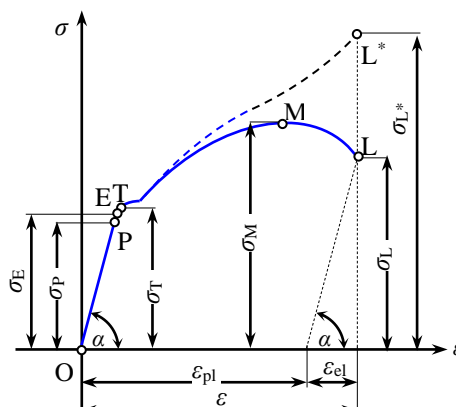
Dijagram rastezanja (konvencionalni)

Proces rastezanja (razvlačenja) probnog štapa (eprovete) najbolje se vidi na dijagramu rastezanja koji se dobije na strojevima nazvanim kidalice.

Na slici 3.3. prikazana je čelična epruveta (probni štapa) koja se ispituje na kidalici; a na slici 3.4. je njen dijagram rastezanja. Crtkano je nacrtan stvarni $\sigma = F/A$, a punom crtom konvencionalni dijagram $\sigma_0 = F/A_0$.



Slika 3.3. Probni štapa (eproveta)



Slika 3.4. Dijagram rastezanja materijala

U području OP (slika 3.4.) vrijedi Hookov zakon, točka P naziva se granica proporcionalnosti. Do točke E (granice elastičnosti) deformacije su elastične, tj. nakon prestanka opterećenja probni štapa vraća se u svoj prvobitni oblik i dimenzije. Opterećenjem iznad točke E dolazi do trajnih (plastičnih) deformacija, tj. epruveta se ne vraća u prvobitni oblik (duljina se povećava a promjer smanji). Od točke T (granice tečenja ili popuštanja) materijal se intenzivnije razvlači, epruveta uskoro počinje dobivati tzv. vrat (3.3.c). Najveće opterećenje štapa je u točki M, koja se naziva granica vlačne ili rastezne čvrstoće. Prekid ili lom epruvete je u točki L.

Od spomenutih granica, za tehničku praksu najznačajnije su granica tečenja ili popuštanja σ_T i vlačna ili rastezna čvrstoća σ_M , kao mehaničke značajke materijala. Na sličan se način mogu dobiti i za druge materijale dijagrami rastezanja epruvete na kidalicama.

Analogno se dobiju, pri ispitivanju epruveta na čisto smicanje, dijagrami smicanja (τ, γ) za čelik i druge materijale.

Dopušteno naprezanje

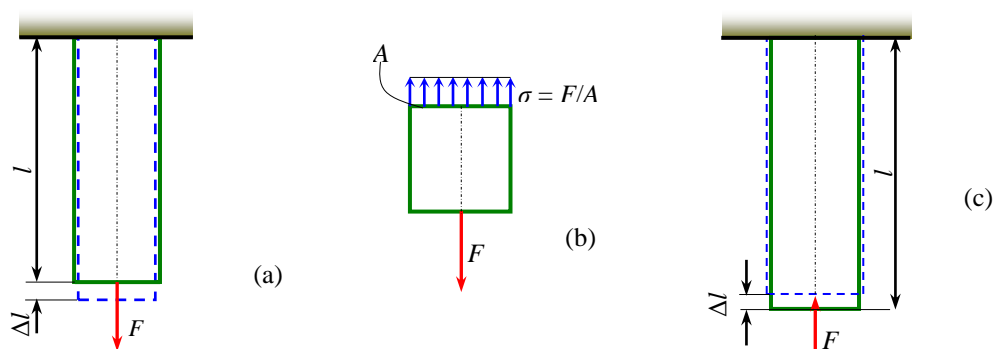
U realnim uvjetima eksploatacija poljoprivrednih strojeva i oruđa ili, općenito, inženjerskih konstrukcija, javljaju se statička i dinamička opterećenja. Ona izazivaju u strojnim dijelovima naprezanja, koja moraju biti manja od neke dopuštene vrijednosti, nazvane dopušteno naprezanje. Dopuštena naprezanja definiraju se pomoću faktora sigurnosti S i vlačne čvrstoće σ_M za krhke materijale (sivi ljev, beton, staklo), odnosno, granice tečenja (popuštanja) σ_T za rastezljive materijale (čelik, bakar, ...)

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_M}{S} \qquad \sigma_{dop} = \frac{\sigma_T}{S} \qquad (3.5.)$$

Faktor sigurnosti S uvijek je veći od jedinice, najčešće je u granicama $1,5 \leq S \leq 2,5$, a može biti veći i od deset.

3.4. Aksijalno opterećenje

Obzirom na smjer opterećenja razlikujemo vlačno i tlačno opterećenje štapa. Štap je opterećen na vlak ako mu se duljina povećava (slika 3.5.a), a površina poprečnog presjeka smanjuje. Na tlak je štap opterećen ako mu se duljina smanjuje, a površina poprečnog presjeka povećava (slika 3.5.c).



Slika 3.5. Štap vlačno opterećen (a) i normalno naprezanje u štapu (b), tlačno opterećenje štapa (c)

Vlačno naprezanje (slika 3.5.b) u poprečnom presjeku je

$$\sigma = \frac{F}{A} \qquad (3.6.)$$

Na temelju Hookeovog zakona apsolutno produljenje štapa (slika 3.5.a) je

$$\Delta l = \frac{F l}{E A} \qquad (3.7.)$$

Umnožak EA naziva se aksijalna krutost štapa.

Iste su relacije za naprezanje i apsolutnu deformaciju i za tlačno opterećenje štapa, samo je, zbog promjene smjera sile, potrebno staviti znak minus. Dakle,

$$\sigma = -\frac{F}{A} \qquad \Delta l = -\frac{F l}{E A} \qquad (3.8.)$$

Ako je štap dugačak i tanak, a tlačna sila prijeđe neki kritični iznos, nastupit će izvijanje ili izbočenje štapa. Zbog ograničenja prostora ovo opterećenje nećemo detaljnije razmatrati.

Pri proračunu aksijalno opterećenih štapova (vlak ili tlak) maksimalno naprezanje u poprečnom presjeku mora biti manje ili jednako dopuštenom naprezanju. Ovaj zahtjev poznat je pod nazivom uvjet čvrstoće.

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{dop} \quad (3.9.)$$

Relacija uvjeta čvrstoće daje mogućnost rješavanja tri skupine zadataka; dimenzioniranje, određivanje nosivosti i vršenje provjere naprezanja.

Primjer 3.1. Ako je opterećen silom $F = 40$ kN, koliko je apsolutno i relativno produljenje štapa duljine $l = 0,5$ m, poprečnog presjeka $A = 5$ cm² i modul elastičnosti $E = 200$ kN/mm²?

Rješenje:

Apsolutno produljenje

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^3 \cdot 500} = \frac{40 \cdot 500}{200 \cdot 500} = 0,2 \text{ mm}$$

Relativno produljenje ili duljinska deformacija iznosi

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,2}{500} = 0,0004 .$$

Primjer 3.2. Koliki je promjer okruglog čeličnog štapa (slika 3.5.a) opterećenog silom $F = 50$ kN ako je dopušteno naprezanje $\sigma_{dop} = 80$ N/mm²?

Rješenje:

Prema jednadžbi (3.9.) površina presjeka štapa iznosi

$$A = \frac{F}{\sigma_{dop}} = \frac{50 \cdot 10^3}{80} = 625 \text{ mm}^2$$

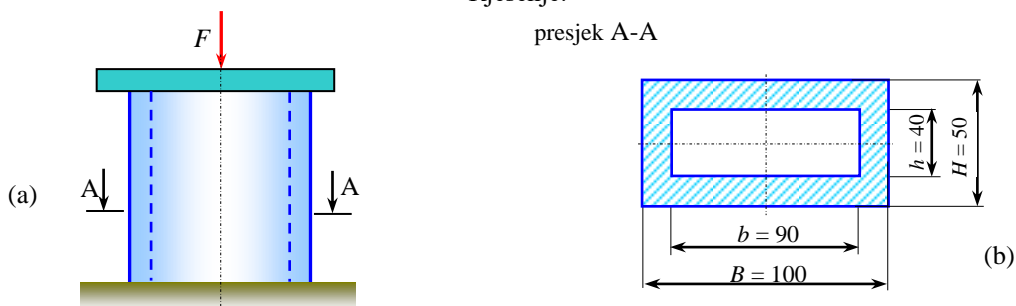
Promjer štapa je

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 625}{\pi}} \approx 28,2 \text{ mm}$$

Primjer 3.3. Čelični stup služi kao oslonac platforme u skladištu. Odrediti naprezanje ako je on opterećen silom $F = 100$ kN, a dimenzije presjeka su mu prikazane na slika 3.6.b.

Rješenje:

presjek A-A



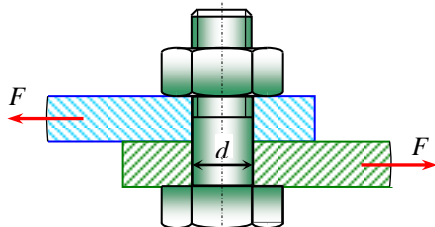
Slika 3.6. uz primjer 3.3.

Naprezanje u stupu iznosi

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{BH - bh} = \frac{100 \cdot 10^3}{100 \cdot 50 - 90 \cdot 40} = \frac{100 \cdot 10^3}{5000 - 3600} = \frac{100}{5 - 3,6} \approx 71,4 \text{ N/mm}^2$$

3.5. Smicanje

Kad sila djeluju okomito na uzdužnu os štapa (na slici 3.7. to je stablo vijaka) i nastoji ga odrezati, smatramo da je poprečni presjek stabla vijaka opterećen na smicanje ili odrez. Posmično ili tangencijalno naprezanje se može izračunati iz izraza



Slika 3.7. Stablo vijaka opterećeno na smicanje

$$\tau = \frac{F}{A_s} \quad (3.10.)$$

gdje je A_s - smična površina.

Na smicanje su, pored vijaka, opterećeni zavari, zakovice, svornjaci i drugi elementi strojeva.

Iz uvjeta čvrstoće strojnih dijelova opterećenih na smicanje

$$\tau = \frac{F}{A_s} \leq \tau_{dop} \quad (3.11.)$$

može se dimenzionirati, određivati nosivost ili vršiti provjera naprezanja.

Uvjet rezanja je da tangencijalno naprezanje na odreznim površinama bude veće od čvrstoće materijala na smicanje

$$\tau = \frac{F}{A_s} \geq \tau_M \quad (3.12.)$$

Prema ovoj relaciji odvija se i proces odrezivanja stabljika kulturnih biljaka reznim uređajima poljoprivrednih strojeva (kosilica) i alata (srp).

Primjer 3.4. Sila rezanja okrugle grančice iznosi 1000 N (vidi primjer 2.11). Koliki je promjer grančice ako je $\tau_M = 5 \text{ N/mm}^2$?

Rješenje:

Prema jednadžbi (3.12.) slijedi

$$A_s = \frac{F}{\tau_M} \quad \text{odnosno} \quad d = \sqrt{\frac{4F}{\pi \tau_M}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1000}{\pi \cdot 5}} \approx 16 \text{ mm}$$

Primjer 3.5. Odrediti koliku će silu prenijeti stablo vijka (slika 3.7.) promjera $d = 12 \text{ mm}$ ako je napravljeno od čelika s dopuštenim naprezanjem $\tau_{dop} = 50 \text{ N/mm}^2$.

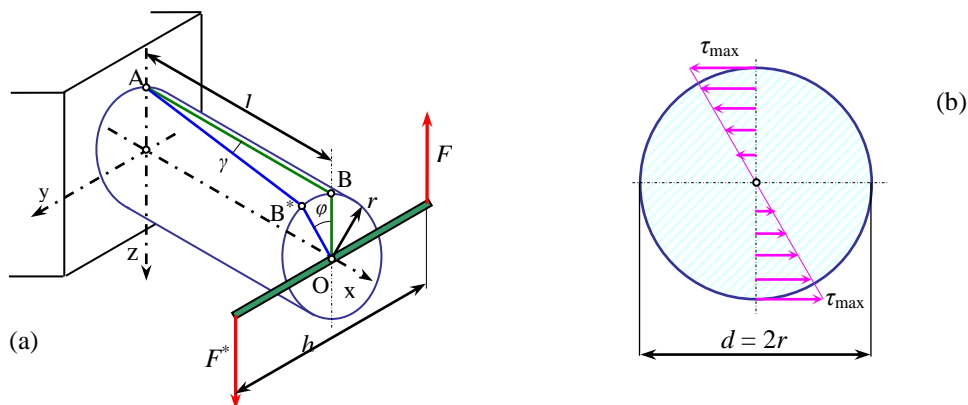
Rješenje:

Prema jednadžbi (3.11.)

$$F = A_s \tau_{dop} = \frac{d^2 \pi}{4} \tau_{dop} = \frac{12^2 \pi}{4} \cdot 50 \approx 5655 \text{ N}$$

3.6.Uvijanje

Okrugli (kružni) štap poprečnog presjeka, na jednom je kraju ukliješten, a na drugom opterećen spregom sila, napregnut je na uvijanje ili torziju (slika 3.8.). Zbog momenta sprega sila u svim poprečnim presjecima štapa, pojavljuje se moment uvijanja ili torzije M_t .



Slika 3.8. Štap kružnog presjeka opterećen na uvijanje

S opterećenjem na uvijanje povezano je klizanje poprečnih presjeka, odnosno pojava posmičnog ili tangencijalnog naprezanja, koje je najveće na obodu, a u središtu štapa jednako nuli (slika 3.8.b).

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \quad (3.13.)$$

gdje je W_p - polarni otporni moment presjeka štapa, za kružni presjek štapa $W_p \approx 0,2d^3$.

Zbog uvijanja, izvodnica štapa AB zaokrene se za kut smika γ , a polumjer štapa OB za kut uvijanja φ (grčko slovo – fi). Kut uvijanja nalazimo iz relacije

$$\varphi = \frac{M_t l}{G J_p} \quad (3.14.)$$

gdje je umnožak GJ_p - torzijska krutost štapa, G - modul klizanja, J_p - polarni moment tromosti ili inercije. Polarni moment inercije štapa za kružni je presjek $J_p \approx 0,1d^4$.

Kut uvijanja φ mjeri se u radijanima. Veza između kuta u stupnjevima φ^0 i radijanima $\widehat{\varphi}$ je

$$\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} \widehat{\varphi}$$

Štapovi (vratila) koja prenose snagu, opterećeni su momentom uvijanja

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{30 P}{\pi n} = 9,55 \frac{P}{n} \quad (3.15.)$$

gdje je P - snaga u W, ω (grčko slovo - omega) - kutna brzina u s^{-1} , a n - brzina vrtnje u min^{-1}

Torzijske opruge i vratila strojeva su tipični konstrukcijski elementi opterećeni na uvijanje. Njihov proračun, kao i proračun drugih strojnih dijelova, vrši se s obzirom na čvrstoću i deformacije (krutost).

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_{dop} \quad \text{i} \quad \varphi = \frac{M_t l}{G J_p} \leq \varphi_{dop} \quad (3.16.)$$

Spomenute relacije mogu se uporabiti za određivanje dimenzije, nosivosti ili provjeravati naprezanje i deformaciju.

Primjer 3.6. Odrediti posmično naprezanje u priključnom vratilu traktora promjera 35 mm koje prenosi 50 kW snage pri $n = 540 \text{ min}^{-1}$.

Rješenje:

Prvo nađimo moment uvijanja prema jednadžbi (3.15.)

$$M_t = 9,55 \frac{P}{n} = 9,55 \cdot \frac{50 \cdot 10^3}{540} \approx 884 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Maksimalno naprezanje na obodu vratila, ako je $W_p \approx 0,2 d^3$, prema izrazu (3.13.) iznosi

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{M_t}{0,2 d^3} = \frac{884}{0,2 \cdot 0,035^3} = 103 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Primjer 3.7. Koliki je kut uvijanja kružnog čeličnog štapa duljine $l = 800 \text{ mm}$ i promjera $d = 20 \text{ mm}$? Štap je opterećen momentom uvijanja $M_t = 100 \text{ N}\cdot\text{m}$. Modul klizanja za čelik iznosi $G = 80 \text{ kN/mm}^2$.

Rješenje:

Kut uvijanja prema jednadžbi (3.14.) je

$$\varphi = \frac{M_t l}{G J_p} = \frac{M_t l}{G \cdot 0,1 d^4} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 800}{80 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 20^4} = 0,0625 \text{ rad}$$

U stupnjevima to iznosi $\varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} \hat{\varphi} = \frac{180}{\pi} \cdot 0,0625 = 3,6^0$

3.7. Savijanje

Ako na štap djeluju vanjske sile okomito na njegovu uzdužnu os, on je opterećen na svijanje. Ovo opterećenje javlja se kod nosača, konzola, osovine, poluga, zubaca zupčanika i drugih strojnih dijelova.

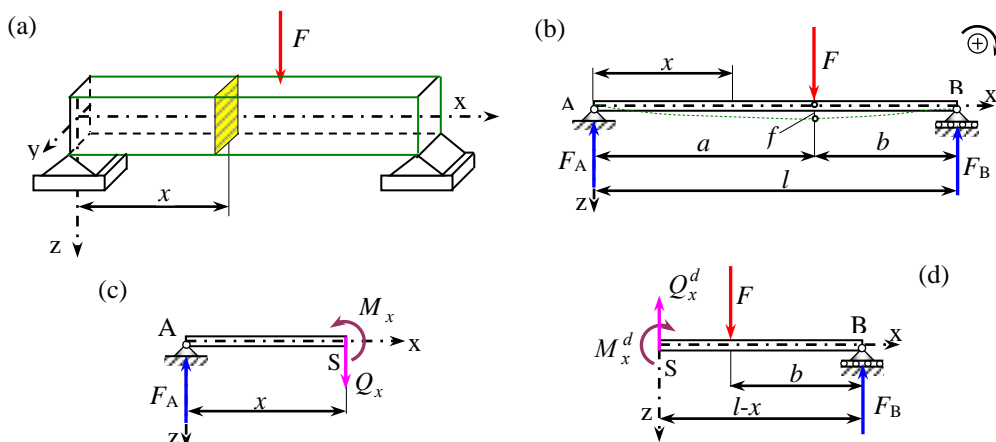
a) Unutarnje sile kod nosača

Prije govora o naprezanjima i deformacijama poprečnih presjeka nosača, zadržimo se na određivanju unutarnjih sila u proizvoljnim presjecima nosača.

Neka je nosač opterećen silom F , prema slici 3.9.a, a treba odrediti unutarnje sile u presjeku x . Prikažimo pojednostavljeno nosač sa zadanim opterećenjem i ucrtajmo reakcije u osloncima (slika 3.9.b). Prvo odredimo reakcije u osloncima, na već poznati način. Napišimo jednadžbe ravnoteže

$$\sum F_{iz} = -F_A + F - F_B = 0$$

$$\sum M_A^{F_i} = F a - F_B l = 0$$



Slika 3.9. Poprečna sila i moment savijanja u presjeku nosača

Iz ravnotežnih jednadžbi slijedi

$$F_B = F \frac{a}{l} \quad \text{i} \quad F_A = F \frac{b}{l}$$

Zamislimo da smo zadani nosač presjekli i podijelili na dva dijela (slika 3.9.a i b). U presjeku se pojavljuju unutarnje sile među česticama materijala, koji će zajedno s vanjskim silama (aktivne i reaktivne) držati ravnotežu lijevog, odnosno, desnog dijela nosača. Unutarnja sila u presjeku x , očituje se kao poprečna sila Q_x i moment savijanja M_x (slika 3.9.c i d).

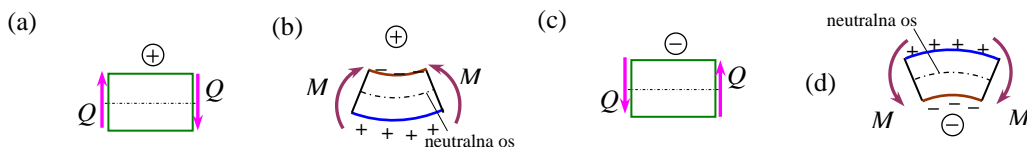
Poprečna sila jednaka je sumi svih sila lijevo ili desno od promatranog presjeka nosača.

$$Q_x = F_A \quad \text{ili} \quad Q_x^d = -F_B + F \quad (3.17.)$$

Moment savijanja jednak je sumi momenta svih sila lijevo ili desno od promatranog presjeka.

$$M_x = F_A \cdot x \quad \text{ili} \quad M_x^d = -F_B \cdot (l-x) + F \cdot [(l-x)-b] \quad (3.18.)$$

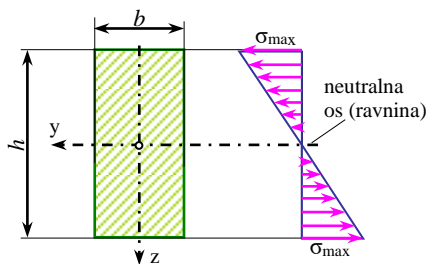
Poprečna sila je pozitivna ako je na lijevom presjeku nosača usmjerena prema dolje, a na desnom prema gore (slika 3.10.a i c). Moment savijanja je pozitivan, ako se nosač savija s izbačenom stranom prema dolje (slika 3.10.b), a negativna ako je izbačena strana prema gore (slika 3.10.d). Uobičajeno se crtaju dijagrami poprečnih sila i momenta savijanja po dužini nosača.



Slika 3.10. Poprečna sila i moment savijanja pozitivnog (a i b) i negativnog (c i d) smjera

b) Naprezanje i deformacije

Za savijanje je karakteristično da paralelni poprečni presjeci nosača prije deformiranja u procesu deformiranja zauzimaju kosi položaj. Iz slike 3.9.b očito je da se gornja vlakna nosača sabijaju, a donja razvlače. Vlakna poprečnog presjeka nosača, koja se niti razvlače niti sabijaju, su neutralna vlakna (neutralna ravnina), a os simetrije x je neutralna os (linija).



Slika 3.11. Raspodjela naprezanja po visini presjeka štap (nosača) pri savijanje

Neutralna vlakna čine neutralni sloj ili neutralnu ravninu (slika 3.11.). Sabijanje i razvlačenje vlakana, odnosno pojavu normalnog naprezanja, uvjetuje moment savijanja. Pored momenta svijanja, u općem slučaju, javlja se i poprečna sila koja izaziva međusobno klizanje (smicanje) poprečnih presjeka. Smicanje, odnosno pojava tangencijalnog naprezanja je malo, pa se može zanemariti.

Najveće normalno naprezanje javlja se u vlaknima koja su najudaljenija od neutralne ravnine (slika 3.11). Ono iznosi

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \tag{3.19.}$$

gdje je M_{max} - maksimalni moment savijanja i W_y - aksijalni otporni moment presjeka.

Aksijalni otporni moment pravokutnog presjeka je $W_y = \frac{bh^2}{6}$, a kružnog presjeka $W_y \approx 0,1d^3$.

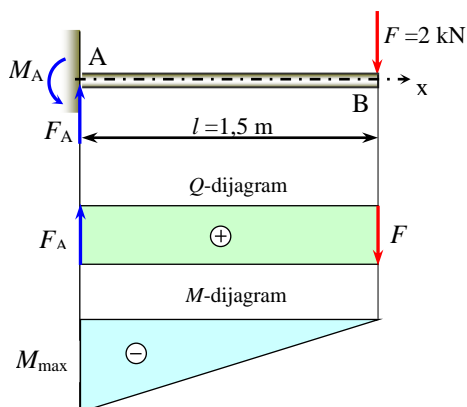
Provjera naprezanja, određivanje nosivosti i dimenzioniranje vrši se iz uvjeta čvrstoće

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq \sigma_{dop} \tag{3.20.}$$

Deformacija pri svijanju očituje se u iskrivljenju neutralne linije, koja je prije opterećenja bila pravocrtna (ravna). Udaljenost pojedinih točaka neutralne linije od tih istih točaka prije deformacije naziva se progib (na slici 3.9.b označen je slovom f). Izračunavanje progiba nosača dosta je složeno i prelazi okvire zamišljene nastave ovog kolegija.

Primjer 3.8. Konzolni nosač je zadan i opterećen prema slici 3.12. Odrediti naprezanje u opasnom presjeku nosača, ako mu je promjer $d = 70$ mm.

Rješenje:



Slika 3.12. uz primjer 3.8

Reakcije u osloncima

$$F_A = 2 \text{ kN} \quad - \text{ sila}$$

$$M_A = 2 \cdot 1,5 = 3,0 \text{ kNm} \quad - \text{ moment uklještenja}$$

Poprečna sila i moment savijanja

$$Q = F_A = 2 \text{ kN}$$

$$M_A = - 3,0 \text{ kNm}, \quad M_B = 0.$$

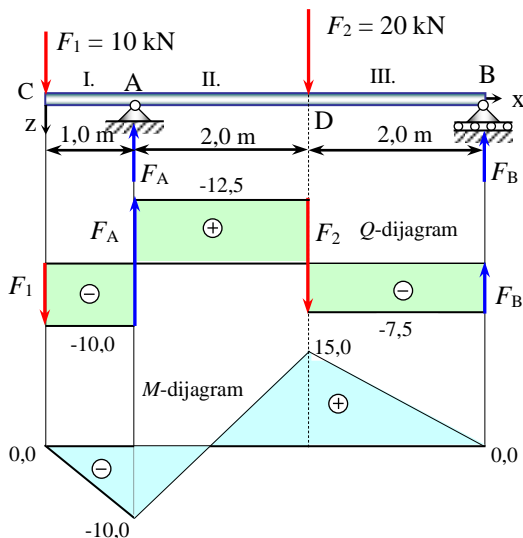
Nacrtamo dijagrame poprečne sile Q i momenta savijanja M .

Naprezanje u opasnom presjeku (uklještenju) je

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{M_A}{0,1d^3} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 70^3} \approx 87,5 \text{ MPa}$$

Primjer 3.9. Za nosač zadan i opterećen prema slici 3.13. odrediti: reakcije u osloncima, poprečne sile i moment savijanja u karakterističnim točkama (presjecima) nosača. Nacrtati i kotirati Q i M dijagrame.

Rješenje:



Slika 3.13. uz primjer 3.9.

Reakcije u osloncima

$$\sum F_{iz} = F_1 - F_A + F_2 - F_B = 0$$

$$\sum M_A^{F_i} = -F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 2 - F_B \cdot 4 = 0$$

Rješavanjem jednačbi nalazimo

$$F_B = 7,5 \text{ kN} \quad \text{i} \quad F_A = 22,5 \text{ kN.}$$

Poprečne sile u poljima I, II i III

$$Q_I = -F_1 = 10 \text{ kN}$$

$$Q_{II} = -F_1 + F_A = 10 - 22,5 = 12,5 \text{ kN}$$

$$Q_{III}^d = -F_B = -7,5 \text{ kN}$$

Momenti savijanja u točkama

$$M_C = 0 \quad \text{i} \quad M_B = 0$$

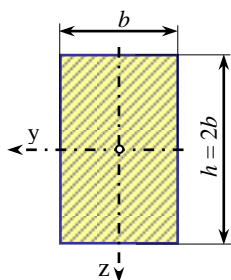
$$M_A = -F_1 \cdot 1 = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D^d = -(-F_B) \cdot 2 = 15 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Temeljem izračunatih vrijednosti crtamo dijagram poprečnih sila i momenta savijanja (slika 3.13.).

Primjer 3.10. Dimenzionirati nosač iz prethodnog primjera ako je njegov poprečni presjek u obliku pravokutnika s omjerom stranica 1:2. Dopusšteno naprezanje iznosi $\sigma_{dop} = 180 \text{ N/mm}^2$.

Rješenje:



Slika 3.14. uz primjer 3.10.

Prema jednačbi (3.20.) $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{max}} \leq \sigma_{dop}$

Maksimalni moment savijanja, u ovom slučaju, je u presjeku D.

Za pravokutni poprečni presjek, aksijalni je otporni moment

$$W_y = \frac{bh^2}{6}, \text{ što za } h = 2b \text{ daje } W_y = \frac{4}{6} b^3.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$b = \sqrt[3]{\frac{6 M_D}{4 \sigma_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{4 \cdot 180}} \approx 50 \text{ mm}$$

Visina je presjeka $h = 2b = 2 \cdot 50 = 100 \text{ mm}$.

3.8. Izvijanje

Ako se štap optereći pritiskom silom, kažemo da je štap opterećen na tlak. Međutim, ako je štap dugačak i tanak, a sila prijeđe neki kritični iznos, nastupit će izvijanje ili izbočenje štapa. Ta kritična sila izaziva u poprečnim presjecima štapa kritično naprezanje.

Kritična sila se određuje prema Eulerovoj (čit. Ojler) formuli. Ona je izvedena pod pretpostavkom da su naprezanja štapa u elastičnom području do granice proporcionalnosti.

$$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2} \quad (3.21.)$$

gdje je E - modul elastičnosti (ovisni o vrsti materijala)

I_{\min} - minimalni moment inercije presjeka (ovisan o obliku i veličini poprečnog presjeka štapa)

l_i - duljina izvijanja (ovisi o duljini i načinu učvršćenju štapa).

$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2}$	$F_k = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{4l^2}$	$F_k = \frac{2\pi^2 E I_{\min}}{l^2}$	$F_k = \frac{4\pi^2 E I_{\min}}{l^2}$

Sl.3.15. Temeljni oblici učvršćenja štapa opterećenog na izvijanje s pripadnim kritičnim silama

Štap se ne smije nikad opteretiti kritičnom silom, jer bi se on izvio (izbočio) i slomio, već nekom silom F , koja je onoliko puta manja od kritične sile koliko iznosi faktor sigurnosti ν_s na izvijanje.

Na izvijanje su opterećene klipnjače motora, stupovi zgrada i mostova, stabljike nekih kulturnih biljaka i drugo.

Primjer 3.11. Izračunati kritičnu silu za čelični štap duljine 1,5 m i kružnog poprečnog presjeka promjera 12 mm. Štap je na oba kraja zgloбно vezan.

Rješenje:

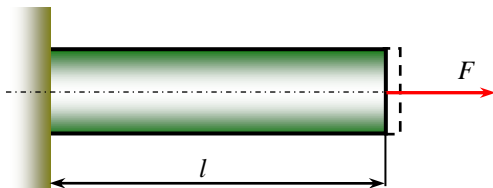
Eulerova kritična sila

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 1018}{1500^2} = 893 \text{ N}$$

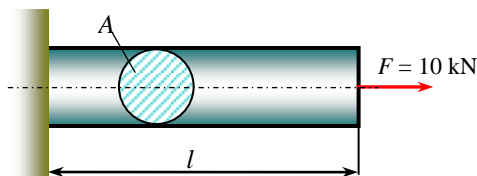
Gdje je moment inercije $I_{\min} \approx 0,05 d^4 = 0,05 \cdot 12^4 = 1018 \text{ mm}^4$.

Zadaci – statika čvrstih deformabilnih tijela

Zadatak 3.1. Ako se štap duljine $l = 1$ m pod djelovanjem aksijalne sile produlji za 1 mm, kolika je duljinska deformacija štapa ? (Odgovor: $\varepsilon = 10^{-3}$)



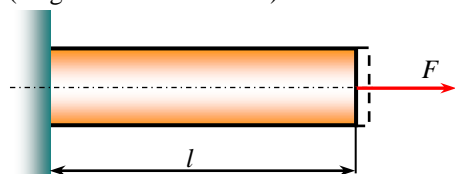
Zadatak 3.1.



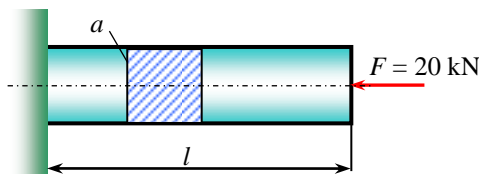
Zadatak 3.2.

Zadatak 3.2. Ako je površina poprečnog presjeka 2 cm^2 , kolika je naprezanje u poprečnom presjeku štapa u paskalima? (Odgovor: $\sigma = 5 \cdot 10^7$ Pa)

Zadatak 3.3. Kolika je nosivost (iznos sile F) ako se čelični štap promjera $d = 10$ mm i duljine $l = 1$ m pod njenim djelovanjem produlji za 1 mm ? Modul elastičnosti čelika iznosi 200 GPa. (Odgovor: $F = 15\,700$ N)



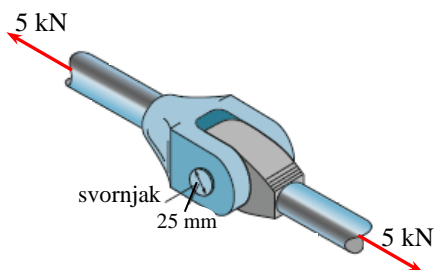
Zadatak 3.3.



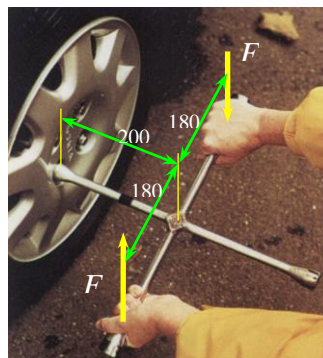
Zadatak 3.4.

Zadatak 3.4. Koliko iznosi stranica a kvadratnog poprečnog presjeka štapa, koji je tlačno opterećen silom F , ako je dopušteno naprezanje 50 MPa ? Koliko iznosi skraćenje ako je štap izrađen iz aluminija duljine $l = 0,5$ m ? (Odgovor: $a = 20$ mm ; $\Delta l = 0,357$ mm)

Zadatak 3.5. Dimenzionirati (odrediti promjer) svornjaka preko kojeg se prenosi opterećenje $F = 5$ kN, ako je dopušteno tangencijalno naprezanje 25 MPa. (Odgovor: $d = 11,3$ mm)



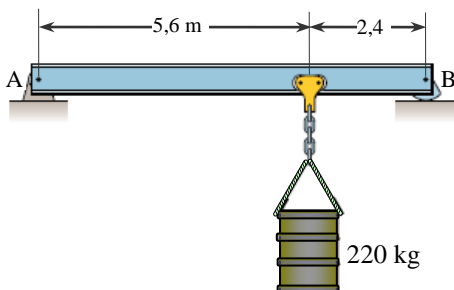
Zadatak 3.5.



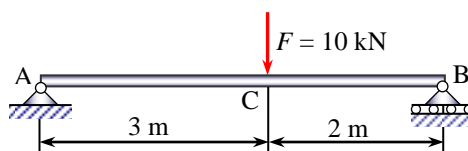
Zadatak 3.6.

Zadatak 3.6. Radi pritezanja vijka na kotaču automobila vozač djeluje silama $F = 120 \text{ N}$ na kracima (promjera 12 mm) križnog ključa prema slici. Odrediti naprezanje u presjecima od križanja krakova ključa pa do mjesta gdje ključ nasjeda na glavu vijka. (Odgovor: $\tau_{\max} = 127,3 \text{ MPa}$)

Zadatak 3.7. Homogeni nosač mase 450 kg opterećen je prema slici. Odrediti reakcije u osloncima. (Odgovor: $F_A \approx 2855 \text{ N}$; $F_B \approx 3718 \text{ N}$)



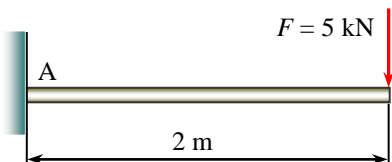
Zadatak 3.7.



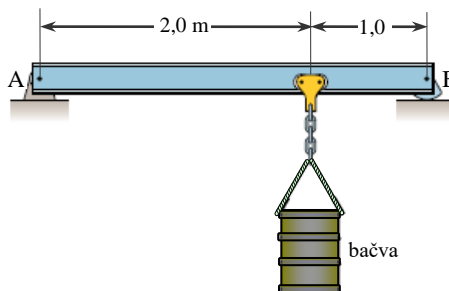
Zadatak 3.8.

Zadatak 3.8. Odrediti najveći moment savijanja nosača opterećenog prema slici. Nacrtati i dijagrame poprečnih sila i momenta savijanja. (Odgovor: $M_{\max} = 12 \text{ kN}\cdot\text{m}$).

Zadatak 3.9. Koliki je promjer konzolnog nosača opterećenog prema slici ako je $\sigma_{dop} = 50 \text{ MPa}$? (Odgovor: $d = 12,6 \text{ mm}$)



Zadatak 3.9.



Zadatak 3.10.

Zadatak 3.10. Koliku najveću težinu bačve može prenijeti nosač, čiji je poprečni presjek pravokutnik $b \times h = 3 \times 6 \text{ cm}$, ako je dopušteno naprezanje 150 MPa ? (Odgovor: $Q \approx 4,1 \text{ kN}$).

4. KINEMATIKA

U kinematici se izučavaju geometrijska svojstva gibanja tijela, ne uzimajući u obzir inercnost tijela i sile, koje djeluju na tijelo. Stoga je kinematika znanost o gibanju, jer proučava geometriju gibanja. Gibanje je promjena položaja tijela u odnosu na neko drugo tijelo. To drugo tijelo, u odnosu na koje proučavamo promjenu položaja tijela, naziva se referentno tijelo. U određenim primjerima proučavanja gibanja mogu se dimenzije tijela zanemariti, tj. gibanje tijela poistovjetiti s gibanjem jedne čestice, odnosno, karakteristične točke tijela. Svako se gibanje zbiva u prostoru i vremenu, pa su prostor i vrijeme temeljni pojmovi u kinematici. Ostale kinematičke veličine; put (pomak), brzina, ubrzanje promatraju se kao funkcije vremena jer se mijenjaju tijekom vremena.

Ako na primjer promotrimo vožnju biciklista (slika 4.1.) od mjesta A (Čepina) do mjesta B (Osijeka) on će neke dijelove puta prijeći ravnom, a neke zavojitom cestom. Nadalje, biciklist vozeći od točke A prema točki B može neke dijelove puta prijeći većom ili manjom brzinom, a možda u nekom vremenu i stane, zbog semafora ili slično. Ako podijelimo prijeđeni put s vremenom vožnje dobit ćemo prosječnu brzinu vožnje biciklista.



Slika 4.1. Definicija prosječne ili srednje brzine

Dakle, prosječna (srednja) brzina je omjer udaljenosti između mjesta (točaka) i vremena u kojem je biciklist prijeđe. Ovo se iskazuje relacijom

$$v = \frac{s}{t}$$

(4.1.) Jedinica za mjerenje brzine dobije se ako jedinicu za mjerenje puta podijelimo s jedinicom za mjerenje vremena.

$$\text{jedinica brzine} = \frac{\text{metar}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{ili} \quad \text{m/s} \quad \text{ili} \quad \text{ms}^{-1}$$

Iz iskustva znamo da se brzina može mjeriti i drugim mjernim jedinicama, na primjer km/h, m/min, km/s, cm/s

Primjer 4.1. Kamion prijeđe udaljenost od 125 km između dva mjesta za 2,5 sata. Kolika je prosječna brzina kamiona u km/h i m/s?

Rješenje:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{125}{2,5} = 50 \text{ km/h} \quad \text{ili} \quad v = 50 \frac{1000}{3600} \approx 13,9 \text{ m/s}$$

Prosječna brzina $v = 13,9$ m/s kazuje da u svakoj sekundi kamion prijeđe gotovo 14 m puta.

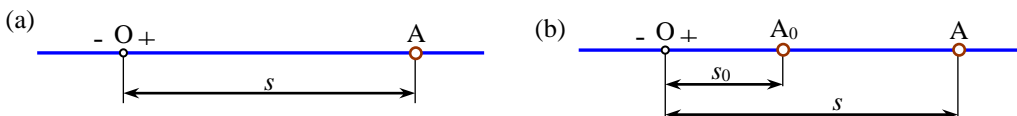
Gibajući se, tijelo ili čestica ostavlja trag koji nazivamo putanja ili trajektorija. Prema obliku putanja može biti pravocrtna ili krivocrtna, stoga razlikujemo pravocrtno od krivocrtnog gibanja.

Ako čestica u jednakim vremenskim razmacima prevali iste putove, ona se giba jednolikom ili konstantnom brzinom. Međutim, ako u istim vremenskim razmacima čestica prevaljuje različite putove, ona se giba promjenjivom brzinom. Prema tome, s obzirom na brzinu, gibanje može biti jednoliko (brzina je konstantna) i promjenjivo (brzina se mijenja).

U nastavku ćemo potanko razmotriti jednoliko i promjenjivo pravocrtno gibanje, a zatim jednoliko i promjenjivo krivocrtno gibanje čestice.

4.1. Jednoliko pravocrtno gibanje čestice

Ako čestica, gibajući se po pravcu konstantnom brzinom u jednakim vremenskim razmacima prelazi jednake putove kažemo da se čestica giba jednoliko.



Slika 4.2. Jednoliko pravocrtno gibanje čestice

Budući se čestica giba konstantnom brzinom v njena udaljenost s od neke referentne točke O (slika 4.2.a) može se odrediti sljedećom relacijom

$$s = vt \quad (4.2.)$$

Ako je u početnom trenutku vremena ($t = 0$) čestica A bila u položaju A_0 (slika 4.2.b) jednačba gibanja čestice glasi

$$s = s_0 + vt \quad (4.3.)$$

gdje je s_0 – početni položaj čestice prema referentnoj točki.

Relacije (4.2.) i (4.3.) izražavaju zavisnost između udaljenosti (koordinate) s pokretne čestice A (od referentne točke O) o vremenu t . One se nazivaju zakoni ili jednačbe gibanja čestice, a općenito se označavaju $s = f(t)$. Tim jednačbama određuje se položaj čestice prema referentnoj točki (čestici) u svakom trenutku vremena.

Primjer 4.2. Od časa kad vozač automobila uoči opasnost, do časa kad reagira, prođe od 0,5 do 1 sekunde. Koliki put prijeđe automobil za prvo, odnosno, drugo vrijeme, ako se automobil giba konstantnom brzinom od 90 km/h?

Rješenje:

Za prvo vrijeme, $t_1 = 0,5$ s

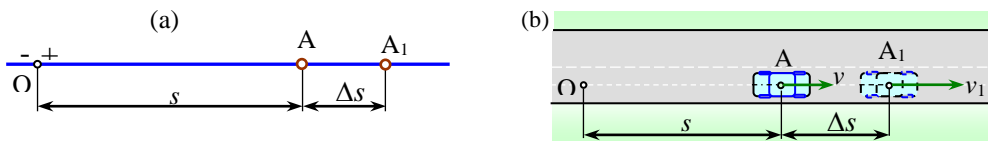
$$s = vt_1 = \frac{90}{3,6} \cdot 0,5 = 12,5 \text{ m}$$

Za drugo vrijeme, $t_2 = 1,0$ s

$$s = vt_2 = \frac{90}{3,6} \cdot 1,0 = 25 \text{ m}$$

4.2. Jednoliko promjenjivo pravocrtno gibanje čestice

Ako čestica u jednakim vremenskim razmacima prevaljuje nejednake putove, kažemo da se ona giba promjenjivo ili nejednoliko. Pri ovom gibanju brzina čestice jeste promjenjiva. Uvedimo pojam srednje brzine čestica.



Slika 4.3. Definicija brzine i ubrzanja promjenjivog pravocrtnog gibanja čestice

Neka se čestica giba sukladno zakonu $s = f(t)$ i u nekom trenutku vremena t zauzme položaj A (slika 4.3.a), a u sljedećem trenutku $t + \Delta t$, položaj A_1 . Put koji čestica prevali za mali vremenski interval Δt , označimo Δs . Omjer između malog puta Δs i malog vremena Δt jest srednja brzina

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4.4.)$$

Brzina čestice je granična vrijednost kojoj teži srednja brzina v_{sr} , kada vremenski interval Δt teži 0.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (4.5.)$$

Prema tome, brzina je derivacija puta po vremenu.

Budući je pri promjenjivom gibanju brzina promjenjiva, definirat ćemo i brzinu promjene brzine, a to je ubrzanje. Neka u položaju (slika 4.3.b) čestica A (automobil) ima brzinu v , a u položaju A_1 brzinu v_1 . Omjer promjene (prirasta) brzine $\Delta v = v_1 - v$ u pripadnom intervalu vremena Δt je srednje ubrzanje

$$a_{sr} = \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Ubrzanje čestice definira se analogno definiciji brzine. Dakle, ubrzanje čestice je granična vrijednost kojoj teži srednje ubrzanje a_{sr} kad vremenski interval Δt teži nuli.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (4.6.)$$

Dakle, ubrzanje je derivacija brzine po vremenu.

Ubrzanje možemo zapisati i u obliku druge derivacije puta (koordinate) po vremenu.

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad (4.7.)$$

Jedinicu za mjerenje ubrzanja dobijemo ako jedinicu za mjerenje brzine podijelimo s jedinicom za mjerenje vremena.

$$\text{jedinica ubrzanja} = \frac{\text{metar u sekundi}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{ili} \quad \text{m/s}^2 \quad \text{ili} \quad \text{ms}^{-2}$$

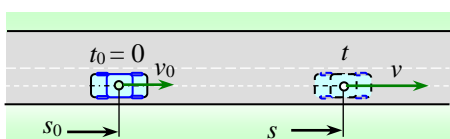
Zemljino ubrzanje, označavamo slovom g , a približno iznosi $9,81 \text{ m/s}^2$.

Ako je (slika 4.3.b) prirast brzine $\Delta v = v_1 - v$ pozitivan, radi se o ubrzanom gibanju, odnosno pozitivnom ubrzanju. Ako je Δv negativan, gibanje se čestice usporava, pa govorimo o negativnom ubrzanju ili usporenju.

Od svih mogućih promjenjivih pravocrtnih gibanja, u nastavku ćemo razmotriti dvije vrste promjenjivog gibanja;

- jednoliko ubrzano, pri čemu iznos brzine linearno raste
- jednoliko usporeno, pri čemu iznos brzine linearno opada.

Za konstantni iznos ubrzanja a izvest ćemo jednadžbe kojim opisujemo promjenu brzine i prijeđenog puta jednolikog ubrzanog gibanja čestice. Ove izvedene relacije možemo primijeniti i za jednoliko usporeno gibanje, ali treba staviti znak minus ispred ubrzanja (negativno ubrzanje ili usporenje!).



Neka je (slika 4.4.) u položaju s_0 , definiranom vremenom $t_0 = 0$, brzina čestice (automobila) v_0 . Zatim, neka se brzina na putu $\Delta s = s - s_0$, nakon vremena t poveća na v zbog konstantnog ubrzanja

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t}$$

Slika 4.4. Uz izvod jednadžbi ubrzanog gibanja

Iz gornje relacije slijedi jednadžba promjene brzine

$$v = v_0 + a t \quad (4.8.)$$

Srednja brzina određena je relacijom

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t}$$

Budući da srednju brzinu možemo izraziti i kao srednju vrijednost brzina u početnom i promatranom položaju

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2}$$

To nakon izjednačavanja lijevih strana prethodnih jednadžbi, proizlazi

$$\frac{s - s_0}{t} = \frac{v_0 + v}{2}$$

Ako u gornju relaciju umjesto brzine v uvrstimo relaciju (4.8.), sredimo i nalazimo jednadžbu promjene puta

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (4.9.)$$

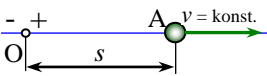
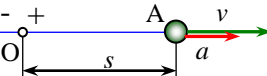
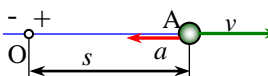
Zatim, jednadžbu (4.8.) preuredimo i nađemo vrijeme $t = \frac{v - v_0}{a}$ i potom uvrstimo u jednadžbu

(4.9.), sredimo i konačno dobijemo relaciju koja povezuje brzine, ubrzanje i koordinate puta.

$$v^2 = v_0^2 + 2 a (s - s_0) \quad (4.10.)$$

Izvedene relacije za tri pravocrtna gibanja; jednoliko, jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno gibanje, možemo sažeto prikazati u tablici 4.1.

Tablica 4.1. Vrste pravocrtnih gibanja

	Jednoliko	Jednoliko ubrzano	Jednoliko usporeno
			
Ubrzanje	$a = \text{nula}$	$a = + \text{konstanta}$	$a = - \text{konstanta}$
Brzina	$v = \text{konstantna}$	$v = v_0 + at$	$v = v_0 - at$
Put	$s = s_0 + vt$	$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$s = s_0 + v_0t - \frac{1}{2}at^2$
		$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$	$v^2 = v_0^2 - 2a(s - s_0)$

Iz tablice razabiremo da su relacije koje opisuju pravocrtna gibanja ili jednadžbe pravca ili jednadžbe kvadratne parabole. Kod jednoliko ubrzanog, odnosno jednoliko usporenog, gibanja brzina se mijenja po zakonu pravca, a put po zakonu kvadratne parabole.

Za početne uvjete (za $t = 0$) definirane s $v_0 = 0$ i $s_0 = 0$ izrazi (4.8. –4.10.) imaju oblik

$$v = at \quad s = \frac{1}{2}at^2 \quad s = \frac{1}{2}vt \quad v^2 = 2as \quad (4.11.)$$

Pomoću jednadžbi (4.11.) može se opisati gibanje, na primjer motornog vozila (automobila, kamiona, traktora) iz stanja mirovanja, a također i slobodno padanje tijela.

Pri slobodnom padu tijela treba uzeti da je ubrzanje $a = g$ i $s = h$, visina s koje tijelo pada. Nakon ove zamjene jednadžbe (4.11.) glase

$$v = gt \quad h = \frac{1}{2}gt^2 \quad h = \frac{1}{2}vt \quad v^2 = 2gh \quad (4.12.)$$

Zadnja relacija (4.12.) može se preurediti u $v = \sqrt{2gh}$ - što je poznata Galilejeva formula brzine slobodnog pada tijela.

Primjer 4.3. U tehničkim podacima proizvođača automobila, pored ostalog, navodi se podatak o vremenu za koje automobil dostigne brzinu od 100 km/h. Ako to vrijeme za neki automobil, na primjer iznosi 11,4 sekunde, koliko je ubrzanje i prijeđeni put automobila?

Rješenje:

Brzinu automobila od 100 km/h pretvorimo u m/s

$$v = 100 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{100}{3,6} \approx 27,78 \text{ m/s}$$

Budući je ovo gibanje automobila jednoliko ubrzano, to ubrzanje iznosi

$$a = \frac{v}{t} = \frac{27,78}{11,4} \approx 2,44 \text{ m/s}^2$$

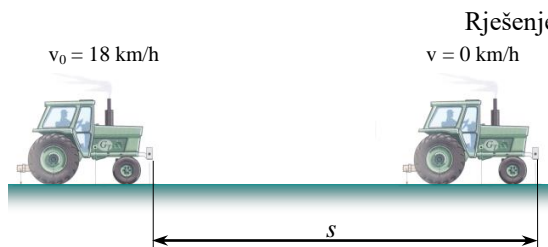
Prijeđeni put $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2,44 \cdot 11,4^2 \approx 158,6 \text{ m}$

Put smo mogli odrediti i pomoću treće jednadžbe (4.11.)

$$s = \frac{1}{2} v t = \frac{1}{2} \cdot 27,78 \cdot 11,4 \approx 158,3 \text{ m}$$

Ova mala razlika izračunatih putova je posljedica zaokruživanja iznosa brzine i ubrzanja.

Primjer 4.4. Traktor koji se giba stalnom brzinom od 18 km/h, kočenjem se zaustavi za 5 sekundi. Koliko iznosi usporenje i put kočenja?



Slika 4.5. uz primjer 4.4.

Rješenje:

Brzina traktora

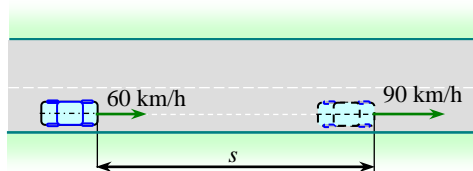
$$v_0 = 18 \text{ km/h} = 18 : 3,6 = 5 \text{ m/s}$$

Iz jednadžbe (4.8) nalazimo usporenje

$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{5 - 0}{5} = 1,0 \text{ m/s}^2$$

Put kočenja $s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = 5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5^2 = 12,5 \text{ m}$

Primjer 4.5. Ako vozač automobila (slika 4.6.) u intervalu od 6 sekundi poveća brzinu sa 60 km/h na 90 km/h, koliko je ubrzanje automobila i koliki je prijeđeni put ?



Slika 4.6. uz primjer 4.5.

Rješenje:

Ako preuredimo jednadžbu (4.8.) nalazimo ubrzanje kojim automobil konstantno ubrzava

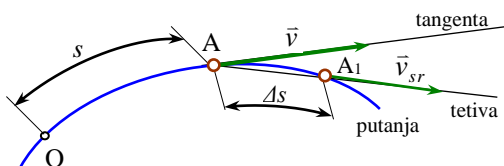
$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$a = \frac{90 : 3,6 - 60 : 3,6}{6} \approx \frac{25 - 16,67}{6} \approx 1,388 \text{ m/s}^2$$

Prijeđeni put je $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0 + 16,67 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1,388 \cdot 6^2 \approx 125,0 \text{ m}$

4.3. Brzina i ubrzanje pri krivocrtном gibanju čestice

Neka se čestica A giba na krivocrtnoj putanji po određenom zakonu $s = s(t)$. Za mali vremenski interval Δt , čestica A pomakne se u položaj A_1 (slika 4.7.).



Slika 4.7. Brzina čestice

Ako je vremenski interval Δt mali, to se luk

$$\widehat{AA_1} = \Delta s \text{ može zamijeniti tetivom } \overline{AA_1}.$$

Omjer pomaka Δs i pripadnog intervala vremena Δt , naziva se srednja brzina

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

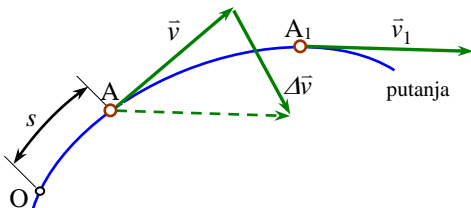
Srednja brzina upravljena je po tetivi od točke A prema točki A_1 .

Brzina čestice je granična vrijednost kojoj teži srednja brzina, kada interval Δt teži 0.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (4.13.)$$

Prema tome, brzina v je derivacija puta po vremenu. Pravac brzine je tangenta na putanji s kojom se podudara tetiva kada $\Delta t \rightarrow 0$. Stoga je brzina vektorska veličina, jer ima svoj iznos, pravac i smjer. Brzinu kao vektor označavamo \vec{v} . Brzina je vektor vezan za točku (česticu).

Neka se čestica A giba po krivocrtnoj putanji (slika 4.8.) i za mali interval vremena Δt prijeđe iz položaja A u položaj A_1 . U položaju A čestica ima brzinu \vec{v} , a u položaju A_1 brzinu \vec{v}_1 .



Slika 4.8. Uz definiciju ubrzanja čestice

Geometrijska razlika vektora brzina, naziva se vektor prirasta brzine $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$. Omjer promjene (prirasta) brzine $\Delta \vec{v}$ u pripadnom intervalu vremena Δt je srednje ubrzanje

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ubrzanje čestice definira se analogno definiciji brzine.

Dakle, ubrzanje čestice je granična vrijednost kojoj teži srednje ubrzanje \vec{a}_{sr} kad vremenski interval Δt teži nuli.

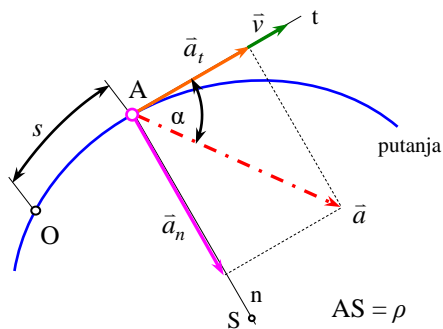
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.14.)$$

Prema tome, ubrzanje je derivacija vektora brzine po vremenu. Ubrzanje označava (opisuje) promjenu iznosa i orijentacije (pravca i smjera) brzine. Ono je također vektorska veličina jer ima svoj iznos, pravac i smjer. Kao i brzina, ubrzanje je vektor vezan za česticu (točku). Ubrzanje je uvijek usmjereno u konkavnu (ulegnutu) stranu putanje.

Vektor ubrzanja možemo rastaviti na dvije međusobno okomite komponente, u smjeru tangente t i normale n na putanju (slika 4.9.).

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad (4.15.)$$

Tangencijalno ubrzanje \vec{a}_t podudara se s tangentom, odnosno, pravcem vektora brzine.



Slika 4.9. Ukupno, normalno i tangencijalno ubrzanje

Ovo ubrzanje označava promjenu iznosa brzine, a definira se izrazom

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (4.16.)$$

Kod pozitivnog prirasta iznosa brzine tangencijalno ubrzanje ima smjer brzine, a kod negativnog prirasta iznosa brzine ono je suprotnog smjera od brzine.

Normalno ili centripetalno ubrzanje \vec{a}_n je okomito na vektor brzine. Ono označava promjenu pravca vektora brzine.

Normalno (centripetalno) ubrzanje uvijek je usmjereno prema središtu zakrivljenosti putanje. Iznos normalnog ubrzanja definira se izrazom

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{4.17.}$$

gdje je ρ - polumjer zakrivljenosti putanje.

Iznos ukupnog ubrzanja \bar{a} određen je primjenom Pitagorina poučka (slika 4.9.)

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{4.18.}$$

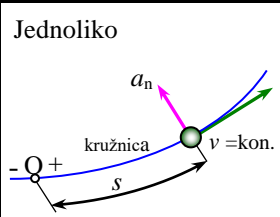
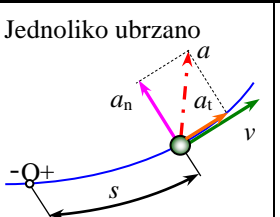
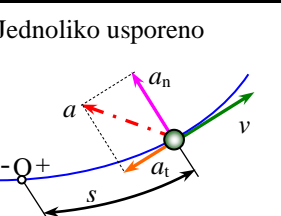
Pravac ubrzanja \bar{a} određen kutom α prema tangenti (brzini)

$$\cos \alpha = \frac{a_t}{a} \tag{4.19.}$$

Slično kao kod pravocrtnog gibanja i krivocrtno gibanje čestice može biti jednoliko i promjenjivo. Analogno pravocrtnim promjenjivim gibanjima, spomenimo dvije vrste promjenjivog krivocrtnog gibanja; jednoliko ubrzano – iznos brzine linearno raste i jednoliko usporeno – iznos brzine linearno opada.

Izvedene relacije za pravocrtna gibanja; jednoliko, jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno gibanje, možemo primijeniti i na krivocrtno gibanje čestice. U tablici 4.2. sažeto su prikazane relacije.

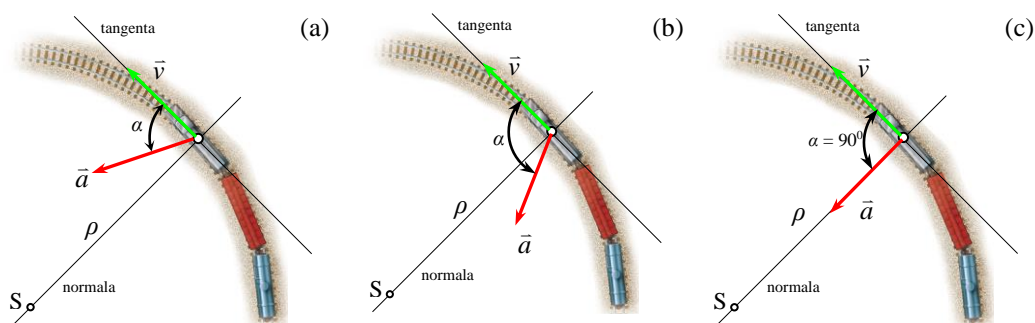
Tablica 4.2. Vrste krivocrtnih gibanja

	Jednoliko	Jednoliko ubrzano	Jednoliko usporeno
			
Tangencijalno ubrzanje	$a_t = \text{nula}$	$a_t = + \text{konstanta}$	$a_t = - \text{konstanta}$
Brzina	$v = \text{konstantna}$	$v = v_0 + a_t t$	$v = v_0 - a_t t$
Put	$s = s_0 + v t$	$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$	$s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a_t t^2$
		$v^2 = v_0^2 + 2 a_t (s - s_0)$	$v^2 = v_0^2 - 2 a_t (s - s_0)$

Primjer 4.6. U prikazanom položaju lokomotiva vlaka ima brzinu i ubrzanje prikazane na slici 4.10. Razmislite i odgovorite koja slika predočava jednoliko gibanje, jednoliko ubrzano i jednoliko usporeno gibanje.

Rješenje:

Jednoliko ubrzano gibanje (slika 4.10.a) jer je kut α između vektora ukupnog ubrzanja \bar{a} i vektora brzine \bar{v} manji od 90° pa je projekcija vektora ubrzanja na pravac brzine, tj. tangencijalno ubrzanje \bar{a}_t , usmjereno u smjeru brzine.



Slika 4.10. uz primjer 4.6.

Slika 4.10.b predočava jednoliko usporeno gibanje jer je kut α između vektora ukupnog ubrzanja \vec{a} i vektora brzine \vec{v} veći od 90° pa je projekcija vektora ubrzanja na pravac brzine – tangencijalno ubrzanje \vec{a}_t , usmjereno u smjeru suprotnom od smjera brzine.

Na slici 4.10.c prikazano je jednoliko gibanje, jer je kut α između vektora ukupnog ubrzanja \vec{a} i vektora brzine \vec{v} jednak 90° , pa je projekcija vektora ubrzanja \vec{a} na pravac brzine, tj. tangencijalno ubrzanje \vec{a}_t , jednako nuli.

Primjera radi za $v = 60 \text{ km/h} = 60:3,6 \approx 16,7 \text{ m/s}$, ubrzanje $a = 2 \text{ m/s}^2$ i kut $\alpha = 70^\circ$ na slici 4.10.a, tangencijalno ubrzanje iznosi

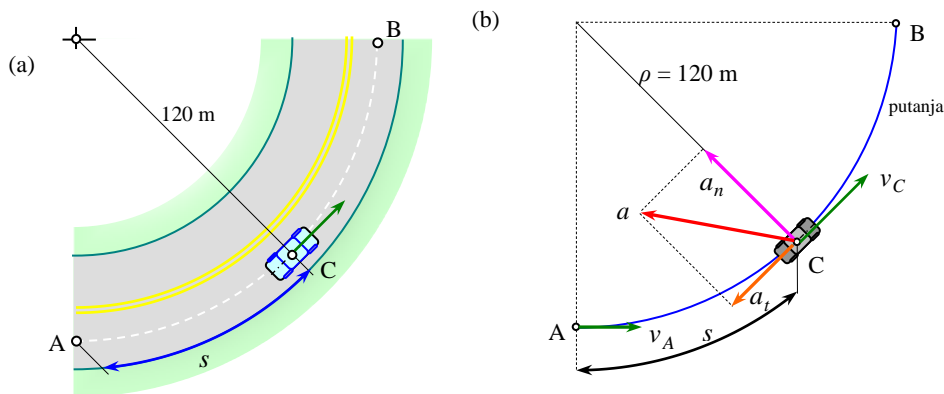
$$a_t = a \cos 70^\circ = 2 \cdot 0,342 \approx 0,684 \text{ m/s}^2$$

Normalno ubrzanje je $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{2^2 - 0,684^2} \approx 1,879 \text{ m/s}^2$

Polumjer zakrivljenosti putanje (tračnica) lokomotive $\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{16,7^2}{1,879} \approx 148,4 \text{ m}$

Primjer 4.7. Automobil koji u položaju A (slika 4.11.a), na kružnoj putanji AB ima brzinu od 90 km/h usporava s tangencijalnim usporenjem od 2 m/s^2 . Odrediti normalno i ukupno ubrzanje automobila u položaju C, koji je na 80 m od položaja A. Nacrtati vektor brzine i vektore ubrzanja automobila u položaju C.

Rješenje:



Slika 4.11. uz primjer 4.7.

Prema zadnoj jednadžbi u četvrtom stupcu tablice 4.2. odredimo brzinu automobila u položaju C.

$$v_C^2 = v_A^2 - 2 a_t s = \left(\frac{90}{3,6}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot 80 = 625 - 320 = 305 \Rightarrow v_C = 17,5 \text{ m/s}$$

Normalno ubrzanje automobila u položaju C

$$a_n = \frac{v_C^2}{\rho} = \frac{17,5^2}{120} = 2,54 \text{ m/s}^2$$

Ukupno ubrzanje automobila je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2,54^2} = 3,23 \text{ m/s}^2$$

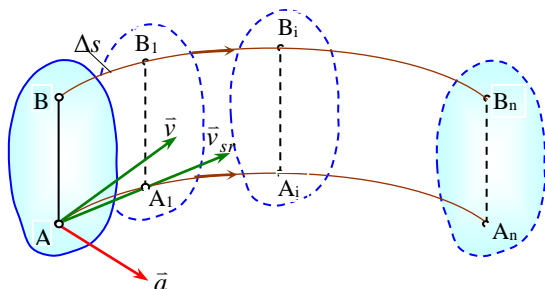
4.4. Translacija tijela

Gibanje tijela, pri kojem dužina koja spaja bilo koje dvije točke (čestice) tijela ostaje paralelna svom početnom položaju, naziva se translacijsko gibanje. Obzirom na putanje čestica tijela, translacija tijela može biti pravocrtna i krivocrtna. Na tijelu, koje se translacijski giba, proizvoljno odabrana dužina \overline{AB} (slika 4.12.) giba se paralelno svom početnom položaju.

$$\overline{AB} \parallel \overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2} \parallel \dots \parallel \overline{A_nB_n}$$

Budući je tijelo kruto, razmak među točkama A i B je nepromijenjen.

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \dots = \overline{A_nB_n}$$



Slika 4.12. Translacija krutog tijela

Za mali vremenski interval Δt točke A i B prevaljuju iste male putove Δs . Stoga je brzina tih točaka jednaka po iznosu

$$v_A = v_B = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (4.20.)$$

i brzine kao vektorske veličine su upravljene u istom smjeru, tj.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v} \quad (4.21.)$$

Analogno se može pokazati i za ubrzanje čestica (točaka) tijela u translaciji

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a} \quad (4.22.)$$

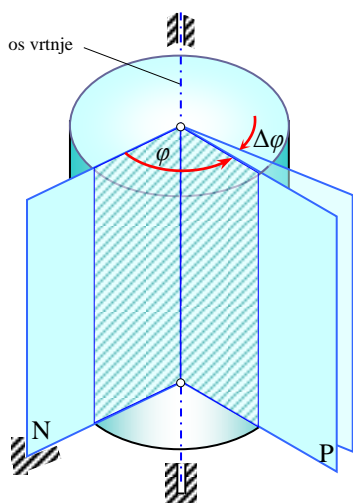
Dakle, pri translacijskom gibanju tijela, sve njegove čestice (točke) opisuju jednake putanje i u svakom trenutku vremena međusobno imaju jednake brzine i ubrzanja (ako se ubrzano/usporeno giba) po iznosu, pravcu i smjeru.

4.5. Vrtanja ili rotacija tijela

Vrtanja ili rotacija tijela oko nepomične osi je takvo gibanje, pri kojem točke koje pripadaju osi ostaju nepomične, a sve ostale točke (čestice) tijela opisuju kružne putanje u ravninama okomitim na os rotacije. Neka su kroz os rotacije (slika 4.13.) položene dvije ravnine N, nepomična, i P, pomična. Položaj tijela (P- pomične ravnine) u odnosu prema nepomičnoj ravnini N definiran je kutom rotacije - φ .

Zakon rotacijskog gibanja definira se jednadžbom

$$\varphi = \varphi(t) \tag{4.24.}$$



Slika 4.13. Rotacija krutog tijela

Ako se za vremenski interval Δt tijelo zakrene za kut $\Delta\varphi$ tada je srednja kutna brzina tijela

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{4.25.}$$

Kutna brzina tijela je granična vrijednost srednje kutne brzine kada Δt teži nuli.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{4.26.}$$

Dakle, kutna brzina je derivacija kuta rotacije tijela po vremenu.

Jedinica za mjerenje kutne brzine dobije se dijeljenjem jedinice za mjerenje kuta s jedinicom vremena

$$\text{jedinica kutne brzine} = \frac{\text{radian}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{ili} \quad \text{s}^{-1}$$

Obično se kutna brzina označava kružnom strjelicom, koja pokazuje smjer promjene kuta rotacije. Često se u praksi kut rotacije φ izražava brojem okretaja N u nekom vremenu,

$$\varphi = 2\pi N \tag{4.27.}$$

jer se tijelo pri jednom okretaju oko osi zakrene za 2π radijana. Očito je broj okretaja

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} \tag{4.28.}$$

Kutna brzina, izražena brojem okretaja u minuti naziva se brzinom vrtanje i označava se slovom n . Zavisnost između kutne brzine ω i brzine vrtanje n (broja okretaja u minuti), je

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,105 n \tag{4.29.}$$

gdje je ω u s^{-1} a n u min^{-1} . Vrijedi i obrnuto

$$n = \frac{30 \omega}{\pi} \approx 9,55 \omega \tag{4.30.}$$

Primjer 4.8. Rotor rotira jednoliko s kutnom brzinom $\omega = 16 \text{ s}^{-1}$. Odrediti koliko on okretaja načini za 5 minuta rotacije.

Rješenje:

Kut rotacije iznosi

$$\varphi = \omega t = 16 \cdot 5 \cdot 60 = 4800 \text{ rad}$$

Prema jednadžbi (2.81.) nalazimo broj okretaja

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{4800}{2\pi} = 764 \text{ okretaja}$$

Omjer promjene kutne brzine $\Delta\omega$ u vremenskom intervalu Δt je srednje kutno ubrzanje

$$\alpha_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Granična vrijednost srednjeg kutnog ubrzanja kad Δt teži nuli je kutno ubrzanje tijela

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha_{sr} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (4.31.)$$

Dakle, kutno ubrzanje tijela jednako je prvoj definiciji kutne brzine po vremenu ili drugoj derivaciji kuta rotacije po vremenu.

Kutno ubrzanje se obično označava kružnom strjelicom koja pokazuje smjer promjene kutne brzine. Dijeljenjem jedinice kutne brzine s jedinicom za vrijeme nalazi se jedinica za mjerenje kutnog ubrzanja.

$$\text{jedinica kutnog ubrzanja} = \frac{\text{radian u sekundi}}{\text{sekunda}} = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad \text{ili} \quad \text{rad/s}^2 \quad \text{ili} \quad \text{s}^{-2}$$

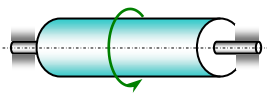
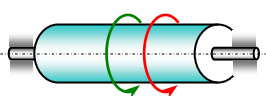
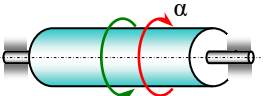
Ako je pri rotaciji tijela kutno ubrzanje α jednako nuli znači da je kutna brzina ω konstantna.

Rotacija tijela je jednoliko promjenjiva ako je kutna brzina tijela promjenjiva, a kutno ubrzanje konstantno. Iste jednadžbe, samo s predznakom minus (-), ispred kutnog ubrzanja (sada kutnog usporjenja), opisuju jednoliku usporenu rotaciju.

Pažljivi čitatelj je već uočio moguću analogiju između kuta rotacije, kutne brzine i kutnog ubrzanja tijela s putom, brzinom i ubrzanjem pri gibanju čestice.

U tablici 4.3. prikazane su analogne relacije za jednoliku, jednoliko ubranu i jednoliko usporenu rotaciju tijela.

Tablica 4.3. Vrste rotacijskog gibanja tijela

	Jednolika	Jednoliko ubrzana	Jednoliko usporena
	 $\omega = \text{konst.}$	 $\omega \quad \alpha$	 $\omega \quad \alpha$
Kutno ubrzanje	$\alpha = \text{nula}$	$\alpha = + \text{konstanta}$	$\alpha = - \text{konstanta}$
Kutna brzina	$\omega = \text{konstantna}$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$\omega = \omega_0 - \alpha t$
Kut	$\varphi = \varphi_0 + \omega t$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2$

Primjer 4.9. Ako se bubnju kombajna brzina vrtnje smanji s 1000 min^{-1} na 600 min^{-1} za vrijeme od 5 sekundi, koliko je usporenje?

Rješenje:

Početna kutna brzina

$$\omega_0 \approx 0,105 n_0 = 0,105 \cdot 1000 = 105 \text{ s}^{-1}$$

Krajnja kutna brzina

$$\omega \approx 0,105 n = 0,105 \cdot 600 = 63 \text{ s}^{-1}$$

Prema drugoj jednadžbi u četvrtom tupcu tablice 4.3. nalazimo kutno usporenje

$$\alpha = \frac{\omega_0 - \omega}{t} = \frac{105 - 63}{5} = \frac{42}{5} = 8,4 \text{ s}^{-2}$$

4.6. Brzine i ubrzanje točaka tijela pri rotaciji

Kružne putanje točaka (čestica) tijela u rotaciji nalaze se u ravninama, koje su okomite na os rotacije. Središte kružnih putanja je u osi rotacije. Polumjeri kružnih putanja nazivaju se i polumjerima rotacije čestica (točaka) tijela.

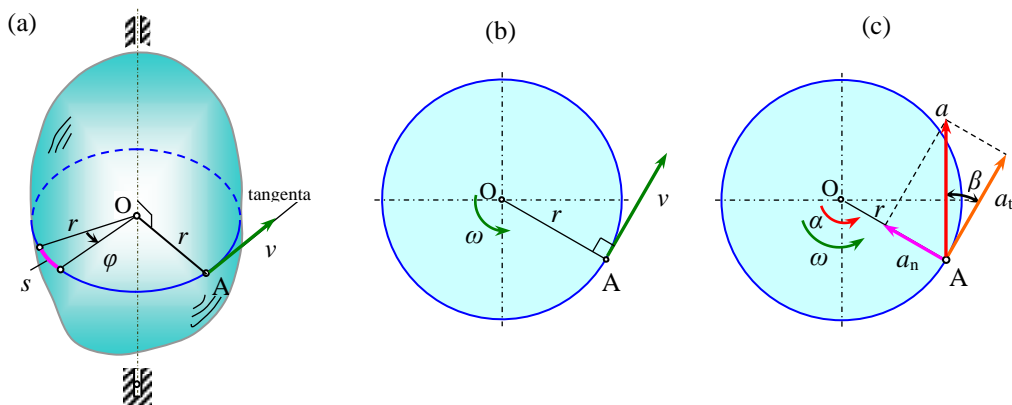
Pri zakretanju tijela za kut φ čestice A po kružnoj putanji prijeđe put s (slika 4.14.a.)

$$s = r \varphi \quad (4.32.)$$

Brzina točke A dobije se derivacijom puta s , tj. jednadžbe gibanja (4.32.) po vremenu t

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega \quad (4.33.)$$

Dakle, iznos brzine točke tijela jednak je umnošku udaljenosti čestice od osi rotacije i kutne brzine. Vektor brzine ima pravac tangente na kružnoj putanji, koji je okomit na polumjer r , a upravljen u smjeru porasta kuta rotacije φ , odnosno u smjeru kutne brzine ω (slika 4.14.).



Slika 4.14. Brzina i ubrzanje točke rotirajućeg tijela

Brzina na obodu rotacijskog tijela naziva se obodna brzina. Iznos brzine se može izvesti i pomoću brzine vrtnje

$$v = r \frac{\pi n}{30} = \frac{d \pi n}{60} \quad (4.34.)$$

gdje je $d = 2r$ - promjer rotirajućeg tijela.

Tangencijalno ubrzanje točke A rotirajućeg tijela iznosi

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r \alpha \quad (4.35.)$$

Normalno ubrzanje točke A tijela u rotaciji je

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \quad (4.36.)$$

gdje je polumjer zakrivljenosti ρ jednak polumjeru kružne putanje r .

Ukupno ubrzanje prema slici 4.14.c, očito je

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad (4.37.)$$

Vektor ukupnog ubrzanja točke rotirajućeg tijela otklonjeno je od vektora brzine za kut β .

Slike 4.14. b i c prikazuju kružne putanje (u presjeku tijela ravninom okomito na os rotacije) te brzinu i ubrzanje točke A. Očito je brzina i ubrzanje točke A tijela proporcionalna s udaljenosti točke od osi rotacije.

Primjer 4.10. Ako je brzina vrtnje bubnja kombajna 1100 min^{-1} , kolika je njegova kutna brzina? Kolika je brzina točke na obodu bubnja promjera 560 mm ?

Rješenje:

Kutna brzina bubnja

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1100}{30} \approx 115 \text{ s}^{-1}$$

Obodna brzina

$$v = \frac{d}{2} \omega = \frac{0,56}{2} 115 = 0,28 \cdot 115 = 32,2 \text{ m/s}$$

Primjer 4.11. Disk (slika 4.15.), polumjera $r = 100 \text{ mm}$ rotira s kutnom brzinom $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$ i kutnim ubrzanjem $\alpha = 50 \text{ s}^{-2}$. Izračunati i nacrtati brzinu i ubrzanje obodne točke A.

Rješenje:

Brzina

$$v = r\omega = 0,1 \cdot 20 = 2 \text{ m/s}$$

Tangencijalno ubrzanje

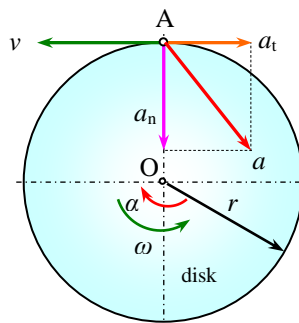
$$a_t = r\alpha = 0,1 \cdot 50 = 5 \text{ m/s}^2$$

Normalno ubrzanje

$$a_n = r\omega^2 = 0,1 \cdot 20^2 = 40 \text{ m/s}^2$$

Ukupno ubrzanje

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{5^2 + 40^2} = 40,3 \text{ m/s}^2$$



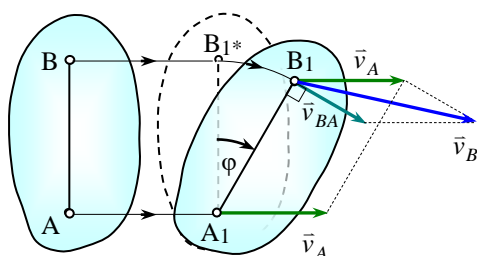
Slika 4.15. uz primjer 4.11.

4.7. Ravninsko gibanje tijela

Gibanje tijela, pri kojem se sve njegove čestice (točke) gibaju u ravninama paralelnim nekoj nepomičnoj ravnini (referentnoj ravnini), naziva se ravninsko gibanje. Svako ravninsko gibanje tijela, odnosno presjeka, može se rastaviti na translaciju i rotaciju. Prema slici 4.16. translacija je pomak dužine \overline{AB} u položaj A_1B_{1*} , a rotacija je zakretanje za kut φ oko okomite osi kroz točku A_1 . Dužina \overline{AB} je, dakle, iz početnog položaja gibajući se ravninski, došla u položaj $\overline{A_1B_1}$. Brzina točke B_1 sastoji se od translacijske i rotacijske komponente brzine.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \tag{4.38.}$$

gdje je \vec{v}_A brzina translacije, a \vec{v}_{BA} brzina kojom točka B rotira oko točke A. Vektor brzine \vec{v}_{BA} je okomita na spojnicu (dužinu) \overline{AB} .



Rotacijska brzina \vec{v}_{BA} iznosi

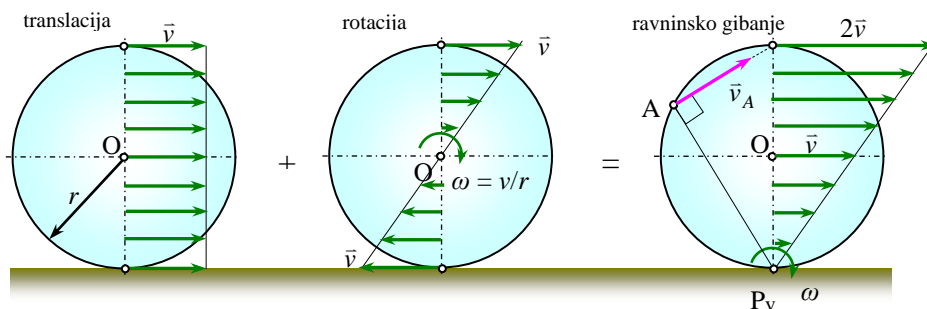
$$v_{BA} = \overline{AB} \omega \tag{4.39.}$$

gdje je ω - kutna brzina rotacije tijela.

Analogno se može izvesti relacija i za ubrzanje, no to prelazi okvire nastave ovog kolegija.

Slika 4.16. Ravninsko gibanje krutog tijela

Kotrljanje kotača, bez klizanja po podlozi je najslikovitiji primjer ravninskog gibanja tijela. Ravninsko gibanje kotača može se rastaviti na translaciju (sve točke kotača imaju istu brzinu) i rotaciju oko osovine O (slika 4.17.).



Slika 4.17. Ilustrativni primjer ravninskog gibanja kotača

Zbroj translacije i rotacije kotača daje ravninsko gibanje (kotrljanje) kotača. Brzina translacije je brzina osovine v , a kutna brzina kotača je $\omega = v/r$. Zbrajanjem translacije i rotacije kotača nastaje rotacija oko točke P_v (trenutni pol rotacije) kutnom brzinom $\omega = v/r$. Prema tome se ravninsko gibanje, umjesto rastavljanja na translaciju i rotaciju, može promatrati kao rotacija oko trenutnog pola rotacije (brzina). Brzina trenutnog pola rotacije jednaka je ničiti.

Stoga je iznos brzine, bilo koje točke tijela, koji se ravninski giba, jednak umnošku kutne brzine oko trenutnog pola rotacije i udaljenosti točke od trenutnog pola rotacije.

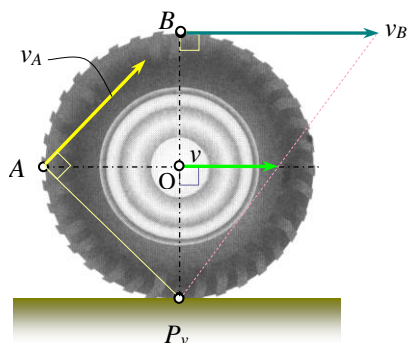
$$v_A = \overline{AP_v} \omega \tag{4.40.}$$

Vektor brzine okomit je na dužinu $\overline{AP_v}$ sa smjerom kutne brzine ω .

Primjer 4.12. Kotač automobila polumjera $R = 250$ mm kotrlja se po horizontalnoj cesti, tako da je brzina središta kotača 72 km/h. Kolika je brzina točaka A i B?

Rješenje:

Točka dodira kotača i podloge P_v je trenutni pol rotacije, stoga je $v_{P_v} = 0$.



Brzina središta kotača je

$$v = r \omega$$

Otud slijedi

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{72:3,6}{0,25} = 80 \text{ s}^{-1}$$

Brzina točke A

$$v_A = \overline{AP_v} \omega = r\sqrt{2} \omega = 0,25\sqrt{2} \cdot 80 = 28,3 \text{ m/s}$$

Brzina točke B

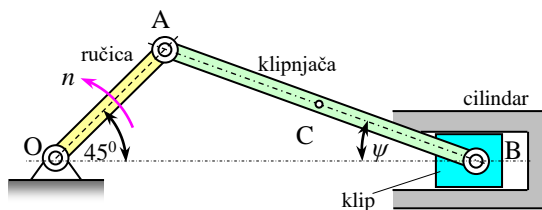
$$v_B = \overline{BP_v} \omega = 2r \omega = 2v = 40 \text{ m/s}$$

Slika 4.18. uz primjer 4.12.

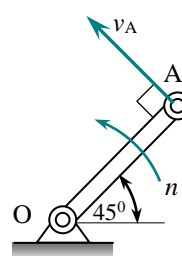
Primjer 4.13. U motornom mehanizmu, prikazanom na slici 4.19.a, ručica OA rotira s $n = 1500$ min^{-1} . U prikazanom položaju odrediti brzinu klipa B i brzinu točke B oko točke A ako je duljina ručice $\overline{OA} = 80$ mm, a klipnjače $\overline{AB} = 200$ mm.

Rješenje:

(a)



(b)



Slika 4.19. Uz primjer 4.13.

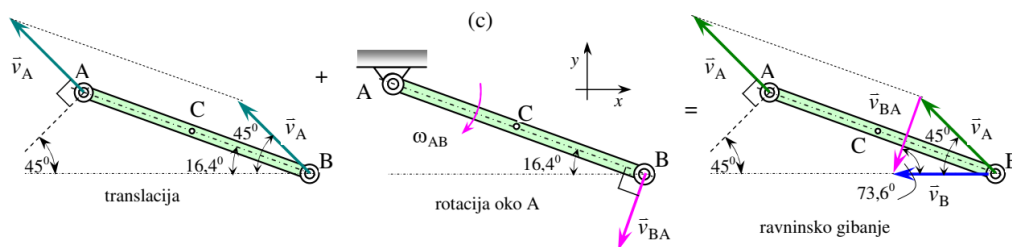
Brzina točke A. Točka A pripada ručici koja rotira oko okretišta O jednolikom brzinom vrtnje n . Vektor brzine točke A okomit je na ručicu i usmjeren je u smjeru brzine vrtnje n (slika 4.19.b). Iznos brzine točke A je

$$v_A = \overline{OA} \omega = \overline{OA} \frac{\pi n}{30} = 0,08 \frac{\pi \cdot 1500}{30} = 12,57 \text{ m/s} .$$

Brzina točke B. Prethodno je potrebno odrediti kut ψ , što ga zatvara klipnjača s horizontalnom osi OB (slika 4.19.a). Primjenom sinusova poučka odredi se kut

$$\frac{\sin \psi}{\overline{OA}} = \frac{\sin 45^\circ}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin \psi = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} \sin 45^\circ = \frac{80}{200} 0,707 = 0,283 \text{ ili } \psi \approx 16,4^\circ .$$

Točka B pripada klipnjači koja vrši ravninsko gibanje. Ona također pripada i klipu koji pravocrtno translira, pa je stoga brzina točke B horizontalnog pravca. Brzinu točke B odredit će se sukladno jednadžbi $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ kao vektorski zbroj brzine točke A i rotacijske brzine točke B oko točke A. Pravac rotacijske brzine \vec{v}_{BA} okomit je na klipnjaču.



Slika 4.19.c - Uz primjer 4.13.

Sukladno vektorskoj jednadžbi $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, projekcije ili skalarne jednadžbe u smjeru x i y osi (slika 4.20.c) su:

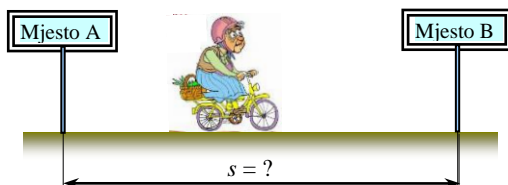
$$\rightarrow x: -v_B = -v_A \cos 45^\circ - v_{BA} \cos 73,6^\circ \quad \text{ili} \quad v_B = 12,57 \cdot 0,707 + v_{BA} \cdot 0,282$$

$$\uparrow y: 0 = v_A \sin 45^\circ - v_{BA} \sin 73,6^\circ \quad \text{ili} \quad 0 = 12,57 \cdot 0,707 - v_{BA} \cdot 0,959 .$$

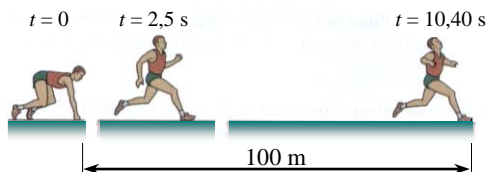
Uvrštavanjem podataka i rješavanjem jednadžbi izračunamo: $v_B \approx 11,5 \text{ m/s}$ i $v_{BA} \approx 9,27 \text{ m/s}$.

Zadaci-kinematika

Zadatak 4.1. Biciklistica vozeći prosječnom brzinom od 15 km/h prevali udaljenost između mjesta A i B za 20 min. Kolika je udaljenost između ta dva mjesta? (Odgovor: $s = 5 \text{ km}$)



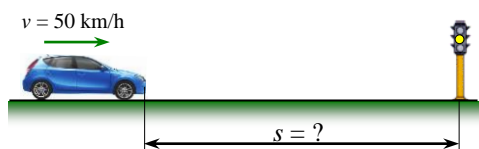
Zadatak 4.1.



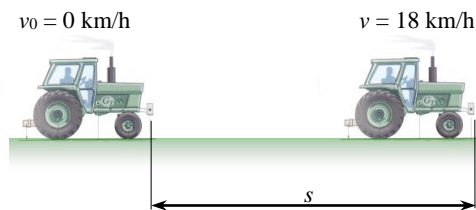
Zadatak 4.2.

Zadatak 4.2. Trkač u utrci na 100 m jednoliko ubrzava i nakon 2,5 sekunde dostigne maksimalnu brzinu, koju zadržava do cilja. Ako vrijeme cijele utrke traje 10,4 sekunde, kolika je maksimalna brzina trkača? (Odgovor: $v_{\text{max}} = 10,93 \text{ m/s}$)

Zadatak 4.3. Vozač automobila vozeći 50 km/h zamijeti na semaforu da je zeleno svjetlo zamijenilo žuto. Žuto svjetlo traje 5 s prije nego se upali crveno svjetlo na semaforu. Vozač kočenjem smanjuje brzinu tako da automobil stane pred semaforom u trenutku kad se upali crveno svjetlo? Koliko iznosi usporenje automobila i na kojoj se udaljenosti s nalazi automobil kad započne kočiti? (Odgovor: $a \approx 2,78 \text{ m/s}^2$; $s = 34,75 \text{ m}$)



Zadatak 4.3.

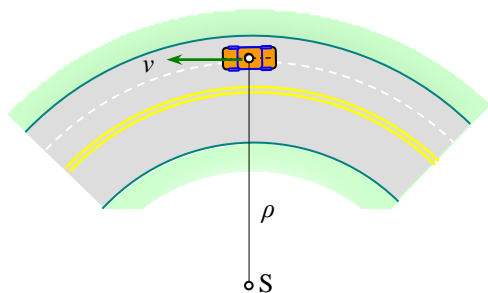


Zadatak 4.4./4.5

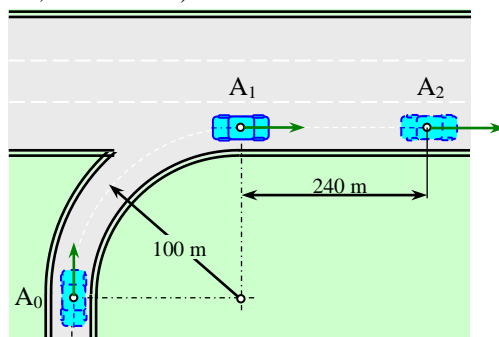
Zadatak 4.4. Traktor iz stanja mirovanja nakon $t = 10$ s postigne brzinu od 18 km/h. Koliko iznosi ubrzanje i prevaljeni put ? (Odgovor: $a = 0,5$ m/s² ; $s = 25$ m).

Zadatak 4.5. Ako traktor iz stanja mirovanja jednoliko ubrzano prevali put od 500 m za 100 s, koliko je konstantno ubrzanje traktora i kolika je brzina nakon prevaljenog puta ? (Odgovor: $a = 0,1$ m/s² ; $v = 10$ m/s)

Zadatak 4.6. Automobil vozi jednoliko ubrzano konstantnim tangencijalnim ubrzanjem $a_t = 1,5$ m/s² zakrivljenom cestom prema slici. Ako je $a = 2,5$ m/s² ukupno ubrzanje automobila u točki A, gdje je polumjer zakrivljenosti putanje automobila $\rho = 200$ m, te koliko je tada normalno ubrzanje i brzina automobila ? (Odgovor: $a_n = 2$ m/s², $v = 72$ km/h)



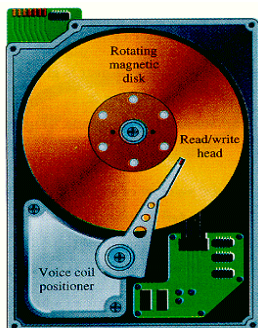
Zadatak 4.6.



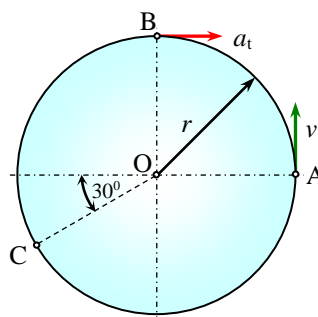
Zadatak 4.7.

Zadatak 4.7. Automobil na prilaznom putu autoceste, u položaju A_0 ima brzinu 40 km/h i počne ubrzavati tako da u položaju A_2 ima 110 km/h. Odrediti ubrzanje kojim automobil povećava iznos brzine. (Odgovor: $a_t = 1,02$ m/s²)

Zadatak 4.8. U trenutku pokretanja, pogonski motor diska kompjutara daje mu konstantno kutno ubrzanje od 200 rad/s². Odredi vrijeme potrebno da disk postigne operativnu brzinu vrtnje od $7\ 200$ min⁻¹ i broj okretaja koje disk učini za to vrijeme. (Odgovor: $t = 3,77$ s ; $N = 226,2$ okretaja)



Zadatak 4.8.

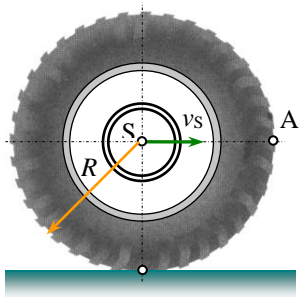


Zadatak 4.9.

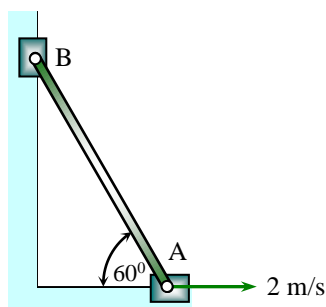
Zadatak 4.9. Kružni disk polujera $r = 200$ mm rotira oko okomite osi kroz točku O. Brzina točke A iznosi 5 m/s, a tangencijalno ubrzanje točke B 10 m/s². Odrediti ubrzanje točke C. (Odgovor: $a = 125,4$ m/s²)

Zadatak 4.10. Ako je brzina vrtnje bubnja kombajna 1000 min⁻¹ a promjer 600 mm, kolika je brzina i ubrzanje točke na obodu bubnja? (Odgovor: $v = 31,4$ m/s; $a = 3290$ m/s²)

Zadatak 4.11. Kotač automobila polujera $R = 30$ cm, kotrlja se po horizontalnoj cesti tako da je brzina središta kotača 50 km/h. Kolika je brzina točke A na obodu kotača? (Odgovor: $v_A = 70,5$ km/h)



Zadatak 4.11.



Zadatak 4.12.

Zadatak 4.12. Štap AB zglobno je vezan za vertikalni i horizontalni klizač. Ako je brzina horizontalnog klizača A 2 m/s kolika je brzina vertikalnog klizača B? (Odgovor: $v_B \approx 1,15$ m/s)

5. KINETIKA

Kinetika je dio mehanike, u kojoj se proučava gibanje tijela pod djelovanjem sila i pritom se uzima u obzir inertnost ili tromost tijela. Kinetika se temelji na tri Newtonova zakona.

Prvi zakon - zakon inercije. Svako će tijelo ostati u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu, sve dok se pod djelovanjem vanjske sile to stanje ne promijeni. Prema ovom zakonu, ako nema djelovanja sile, tijelo samo sebi ne može promijeniti stanje pravocrtnog gibanja ili mirovanja. Ovaj zakon ukazuje na temeljno svojstvo tijela, da ono ustraje ili zadržava određeno stanje gibanja ili mirovanja.

Drugi zakon - zakon proporcionalnosti sile i ubrzanja. Promjena gibanja je proporcionalna sili što djeluje na tijelo i zbiva se u pravcu i smjeru djelovanja sile. Ovaj zakon se može napisati u obliku

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a} = \vec{F} \quad (5.1.)$$

ili skalarno

$$F = m a \quad (5.2.)$$

Dakle, očito je, sila jednaka umnošku mase tijela i promjene brzine, ili mase i ubrzanja. Drugim riječima, ubrzanje tijela je proporcionalno sili koja djeluje na tijelo i usmjereno je u pravcu i smjeru djelovanja sile.

Masa je mjera inertnosti ili tromosti tijela, a karakterizira protivljenje tijela promjeni stanja mirovanja ili gibanja.

Težina tijela je također sila, kojom tijelo privlači Zemlja prema svojem središtu.

$$G = m g \quad (5.3.)$$

gdje je g – Zemljino ubrzanje, a m – masa tijela

Dogovoreno je da normirana vrijednost Zemljinog ubrzanja iznosi

$$g = 9,806\ 65\ \text{m/s}^2 \quad \text{ili} \quad g \approx 9,81\ \text{m/s}^2 \quad (5.4.)$$

Treba razlikovati težinu od mase tijela. Masa je svojstvo tromosti tijela. Ona se mjeri u kilogramima. Težina tijela je sila kojom tijelo pritišće na podlogu. Težina tijela, kao i svaka druga sila, mjeri se u njutnima (znak: N).

Sila od 1njutna daje tijelu mase 1 kilogram ubrzanje od 1 metra u sekundi na kvadrat. Dakle, $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\ \text{m/s}^2$. Znamo da se sila može mjeriti i u decimalnm jedinicama njutna, na primjer kilonjutn (znak: $\text{kN} = 10^3\ \text{N}$) i meganjutn (znak: $\text{MN} = 10^6\ \text{N}$).

Nekad se težina tijela mjerila u kilopondima (znak: kp), koji je bio definiran silom koja tijelu mase 1 kg daje ubrzanja od $9,81\ \text{m/s}^2$.

Međusobni odnos između njutna i nekadašnjeg kiloponda je slijedeći

$$1\ \text{kp} = 9,81\ \text{N} \quad \text{odnosno} \quad 1\ \text{N} = 0,102\ \text{kp} \quad (5.5.)$$

Ilustrirajmo to na primjeru. Kolika je težina tijela mase $m = 80\ \text{kg}$ u njutnima i kilopondima? Prema (5.3.) težina tijela u njutnima iznosi

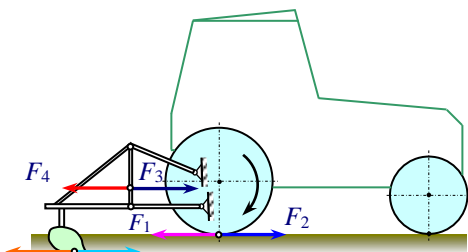
$$G = m g = 80 \cdot 9,81 = 784,8\ \text{N}$$

Težinu tijela izraženu u njutnima pomoću druge formule (5.5.) pretvorimo u kiloponde

$$G = 784,8 \cdot 0,102 = 80 \text{ kp}$$

Dakle, iznos težine tijela, izražene u kilopondima, odgovara iznosu mase tijela u kilogramima. Ova činjenica ponekad stvara veliku zabunu kod običnih ljudi, tako da se često masa zamjenjuje težinom i težina izražava u kilogramima, što je naravno pogrešno.

Treći zakon - zakon akcije i reakcije. Svakom djelovanju (akciji) uvijek je suprotno i jednako protudjelovanje (reakcija), ili: uzajamna djelovanja dvaju tijela uvijek su jednaka i suprotnog su smjera. Ovaj zakon definira međudjelovanje među česticama (tijelima) sustava. On se u obliku aksioma oslobađanja veza ili izolacije vezanog tijela, koristio u statici krutih tijela, a kao princip reza u statici čvrstih deformabilnih tijela.



Slika 5.1. Traktorski agregat u oranju

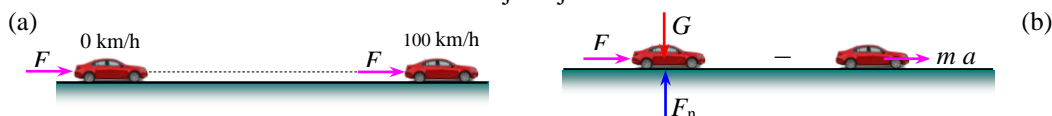
Ilustrirajmo III. Newtonov zakon na primjeru oranja traktorskim agregatom (traktor + plug).

Pri oranju traktorskim agregatom (slika 5.1.) zadnji pogonski kotači traktora potiskuju tlo silom F_1 unazad, a njezina protusila (reakcija) F_2 djeluje na traktor prema naprijed. Traktor vuče plug silom F_3 naprijed, a plug sa svoje strane djeluje na traktor silom F_4 upravljenom unatrag.

Na kraju, plugu koji reže tlo silom F_5 opire ili suprotstavlja se otpor tla silom F_6 unatrag. Gibanje (oranje) traktorskog agregata je moguće samo ako je sila opiranja tla pogonskim kotačima traktora F_2 veća ili jednaka od sile otpora tla plugu F_6 . Ostale horizontalne sile međusobno se poništavaju, kao i vertikalne sile. Stoga vertikalne sile (težine i reakcije tla) nisu na slici niti nacrtane.

Primjer 5.1. Odrediti konstantnu silu F (slika 5.2.a) koja ubrzava automobil mase 1500 kg iz stanja mirovanja do brzine 100 km/h za vrijeme od 10 sekundi. Zanimariti silu otpora kotrljanja između kotača i ceste i otpor zraka.

Rješenje:



Slika 5.2. uz primjer 5.1.

Budući da je gibanje automobila po pravcu, napisati ćemo II. Newtonov zakon u pravcu vožnje prema slici 5.2.b

$$F = m a \quad \text{iz koje nalazimo ubrzanje} \quad a = F/m$$

Ako relaciju za ubrzanje uvrstimo u jednadžbu brzine jednolikog ubrzanog gibanja (4.8.) imamo

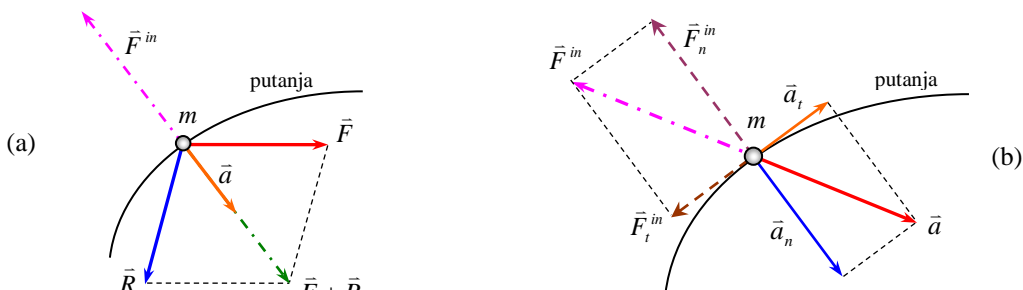
$$v = v_0 + \frac{F}{m} t$$

Prema početnim uvjetima je $v_0 = 0$. Stoga potrebna sila za ubrzanje automobila iznosi

$$F = \frac{m v}{t} = \frac{1500 \cdot (100 : 3,6)}{10} \approx 4167 \text{ N}$$

5.1. Inercijska ili d'Alembertova sila

Neka na česticu mase m (slika 5.3.a.) djeluje aktivna sila \vec{F} (rezultanta svih aktivnih sila) i reakcija veza \vec{R} (rezultanta sila veza). U skladu II. Newtonova zakona može se pisati



Slika 5.3. Inercijska sila (a) i komponente inercijske sile (b) pri krivocrtном gibanju čestice

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{R} \quad \text{ili}$$

$$\vec{F} + \vec{R} + (-m\vec{a}) = 0 \tag{5.6.}$$

Sila $-m \vec{a}$ naziva se inercijskom ili d'Alembertovom silom koja se označava s \vec{F}^{in} .

$$\vec{F}^{in} = -m\vec{a} \quad \text{ili} \quad \text{skalarno} \quad F^{in} = ma \tag{5.7.}$$

Inercijska sila, dakle, jednaka je, po iznosu, umnošku mase i iznosa ubrzanja, a usmjerena je suprotno od smjera ubrzanja. Sada se jednačba (2.99.) može pisati

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{F}^{in} = 0 \tag{5.8.}$$

Dakle, aktivna sila, reakcije veza i inercijska sila međusobno se uravnotežuju. Jasno je da je to fiktivna, a ne stvarna ravnoteža. Ovo je poznati d'Alembertov (čitaj Dalamber) princip.

Pri krivocrtном i promjenjivom gibanju čestice (tijela), ubrzanje \vec{a} se rastavi na normalnu i tangencijalnu komponentu. Analogno se rastavlja i inercijska sila (slika 5.3.b).

Normalna komponenta inercijske sile, naziva se i centrifugalna sila, jednaka je umnošku mase i normalnog ubrzanja čestice

$$F_n^{in} = F_{cf} = m a_n = m \frac{v^2}{\rho} \tag{5.9.}$$

Centrifugalna je sila otpor promjeni pravca brzine, a usmjerena suprotno od smjera normalnog ubrzanja. Kod pravocrtних gibanja nema centrifugalne sile, jer nema promjene pravca brzine.

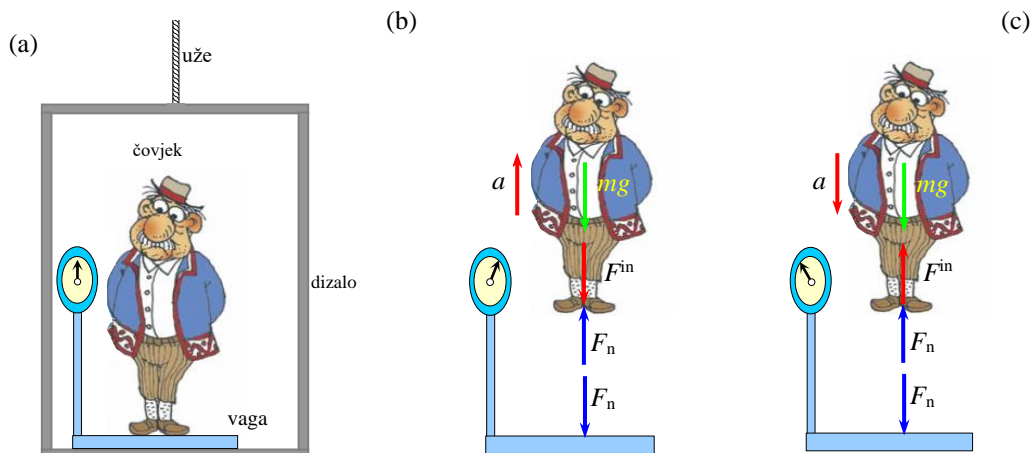
Tangencijalna je komponenta otpor promjeni iznosa brzine, a usmjerena suprotno od tangencijalnog ubrzanja. Njen iznos jednak je umnošku mase čestice i tangencijalnog ubrzanja

$$F_t^{in} = m a_t = m \frac{dv}{dt} \tag{5.10.}$$

Ako je tangencijalno ubrzanje jednako nuli (jednoliko gibanje), tada je i tangencijalna komponenta inercijske sile jednaka nuli.

Primjer 5.2. Kolikom silom pritišće na vagu (slika 2.85.a) čovjek mase $m = 100$ kg prilikom ubrzavanja dizala prema gore i prema dolje s ubrzanjem $a = 1,2$ m/s².

Rješenje:



Slika 5.4. uz primjer 5.2.

Nacrtajmo sliku 5.4.b i c čovjeka oslobođenog od veza s ucrtanom težinom mg , inercijskom silom F^{in} i reakcijom vage F_n . Napišimo jednadžbu "ravnoteže" čovjeka u smjeru vožnje pri ubrzanom gibanju prema gore (slika 5.4.b)

$$F_n - mg - F^{in} = 0$$

Ako inercijsku silu zamijenimo s $F^{in} = ma$ nalazimo silu kojom čovjek pritišće na vagu

$$F_n = m(a + g) = 100 \cdot (1,2 + 9,81) = 1101 \text{ N}$$

Analogna je jednadžba "ravnoteže" čovjeka u smjeru vožnje pri ubrzanom gibanju prema dolje (slika 5.4.c)

$$F_n - mg + F^{in} = 0$$

Zamijenimo inercijsku silu s $F^{in} = ma$ i odredimo silu kojom čovjek pritišće na vagu

$$F_n = m(g - a) = 100 \cdot (9,81 - 1,2) = 861 \text{ N}$$

Ako bi se dizalo gibalo jednoliko ($a = 0$), tada sila kojom pritišće čovjek na vagu iznosi

$$F_n = mg = 100 \cdot 9,81 = 981 \text{ N.}$$

Dakle, prilikom ubrzavanja dizala prema gore, vaga će pokazati veću težinu, a prilikom ubrzavanja prema dolje – manju težinu. Jedino će pri konstantnoj brzini dizala (ubrzanje jednako nuli!) vaga pokazati pravi iznos težine čovjeka.

Primjer 5.3. Kolika centrifugalna sila djeluje na automobil, ukupne mase $m = 1\,500$ kg ako on vozi brzinom $v = 60$ km/h u zavoju polumjera $\rho = 50$ m?

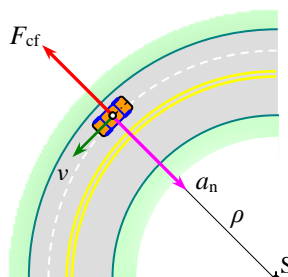
Rješenje:

Centrifugalna sila djeluje u težištu automobila, a usmjerena je prema vanjskoj strani zavoja (slika 5.5.).

Ta sila iznosi

$$F_{cf} = m \frac{v^2}{\rho} = 1500 \frac{(60 : 3,6)^2}{50} = 8333 \text{ N}$$

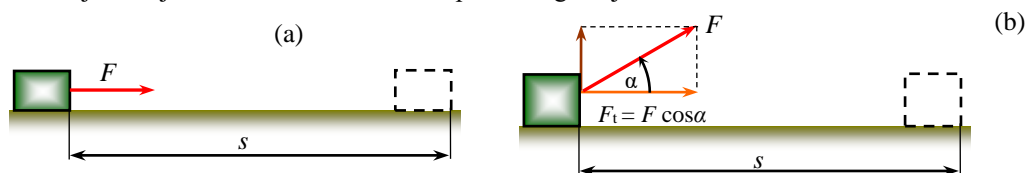
(Imajmo na umu da ravnotežu centrifugalnoj sili mora držati bočna sila trenja između kotača i ceste!)



Slika 5.5. uz primjer 5.3

5.2. Mehanički rad

Razmotrimo najjednostavniji primjer mehaničkog rada konstantne sile pri pravocrtном gibanju čestice. Na slici 5.6.a prikazana sila djeluje u smjeru pravca gibanja čestice, a na slici 5.6.b pravac djelovanja sile zatvara neki kut α s pravcem gibanja čestice.



Slika 5.6. Mehanički rad konstantne sile u pravocrtном gibanju; sila je kolinearna (a) i kosa (b) s putom

Rad sile jednak je umnošku iznosa sile i prijeđenog puta (slika 5.6.a), kad je pravac sile kolinearan (paralelan) s pravcem gibanja

$$W = F s \quad (5.11.)$$

Ako pravac sile zatvara neki kut s pravcem gibanja (slika 5.6.b) tada je rad sile jednak umnošku projekcije sile na pravac gibanja i prijeđenog puta

$$W = F \cos \alpha \cdot s = F_t s \quad (5.12.)$$

Dakle, samo projekcija sile na pravac gibanja vrši rad, dok projekcija sile na okomicu pravca gibanja ne vrši rad.

Analizom jednadžbe (5.12.) možemo zaključiti da je rad pozitivan za područje kuta $0 \leq \alpha < 90^\circ$, za $\alpha = 90^\circ$ jednak je nuli, a za $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ negativan.

Jedinica za mjerenje mehaničkog rada dobije se ako jedinicu za mjerenje sile pomnožimo s jedinicom za mjerenje puta (pomaka).

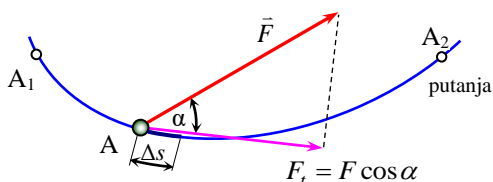
$$\text{jedinica rada} = \text{njutn} \times \text{metar} = \text{Nm} = \text{J}$$

U SI-sustavu, jedinica za mjerenje rada naziva se džul (znak: J). Džul je rad sile od 1 njutna koja djeluje u smjeru gibanja na putu od 1 metra. Dakle, $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$. Kako je džul mala jedinica, u praksi se koriste veće jedinice za rad, na primjer $\text{kJ} = 10^3 \text{ J}$ i $\text{MJ} = 10^6 \text{ J}$.

Pri krivocrtном gibanju čestice A (slika 5.7.) djelovanjem promjenjive sile F izvrši se rad na vrlo malom dijelu puta Δs , koji se može smatrati pravocrtним.

$$\Delta W = F \cos \alpha \Delta s = F_t \Delta s \quad (5.13.)$$

Ako bismo putanju, na primjer od A_1 do A_2 podijelili na konačan broj djelića, tada bismo sumiranjem radova promjenjive sile na svim djelićima putanje dobili ukupan rad



$$W = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \Delta s_i = \sum_{i=1}^n F_{ti} \Delta s_i \quad (5.14.)$$

Znak sume može zamijeniti linijski integral uzduž putanje, od mjesta 1 do mjesta 2

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha \, ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds \quad (5.15.)$$

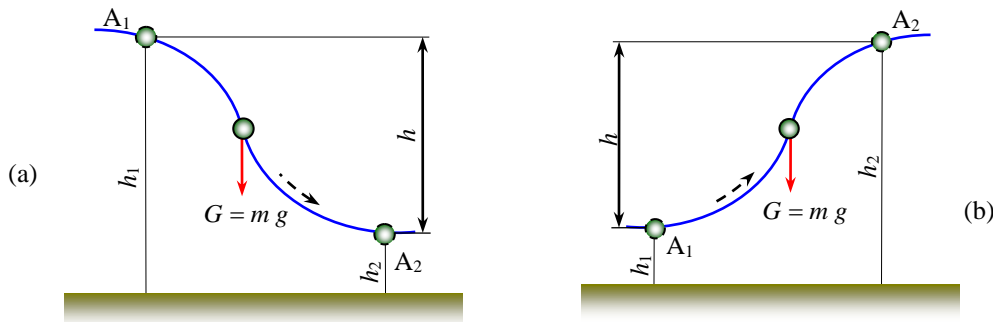
Slika 5.7. Mehanički rad sile pri krivocrtnom gibanju

gdje su granice integriranja, početni i konačni položaj djelovanja sile na putanji.

Rad sile teže. Ako se čestica giba iz položaja A_1 u A_2 , rad sile teže iznosi

$$W = G(h_1 - h_2) = Gh = mgh \quad (5.16.)$$

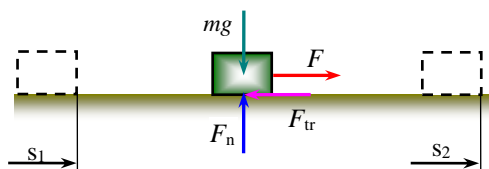
gdje je h_1 i h_2 početna i konačna visina. Prema tome, rad sile teže nije ovisan o obliku putanje.



Slika 5.8. Mehanički rad sile teže

Pri gibanju čestice niz putanju (slika 5.8.a) rad sile teže je pozitivan ($h_1 > h_2$), a pri gibanju čestice uz putanju (slika 5.8.b) rad je sile teže negativan ($h_1 < h_2$). Ako bi visine početnog i konačnog položaja čestice bile jednake ($h_1 = h_2$), bez obzira na oblik putanje, rad je jednak nuli.

Rad sile trenja klizanja. Da bi se tijelo mase m gibalo po hrapavoj podlozi, mora na njega djelovati vanjska sila F , čiji je iznos i pravac jednak, a smjer suprotan sili trenja klizanja.



Slika 5.9. Rad sile trenja klizanja

Kako je smjer sile trenja klizanja (slika 5.9.) suprotan od pomaka (brzine), to je rad sile trenja uvijek negativan..

Rad vanjske sile F iznosi

$$W = F(s_2 - s_1)$$

budući da je $F = F_{tr} = \mu F_n$, slijedi da je

$$W = \mu F_n (s_2 - s_1)$$

Kako je smjer sile trenja F_{tr} suprotan od pomaka čestice, to će rad sile trenja biti negativan.

$$W_{tr} = -F_{tr}(s_2 - s_1) = -\mu F_n(s_2 - s_1) \quad (5.17.)$$

Nasuprot sili teži i elastičnoj sili, koje su konzervativne sile, sila trenja je disipativna sila. Stoga je rad sile trenja klizanja ovisan o obliku putanje

Rad sile opruge/elastične sile. Radu sile F odgovara zatamnjena površina trokuta (slika 5.10.)

$$W = \frac{1}{2} F s$$

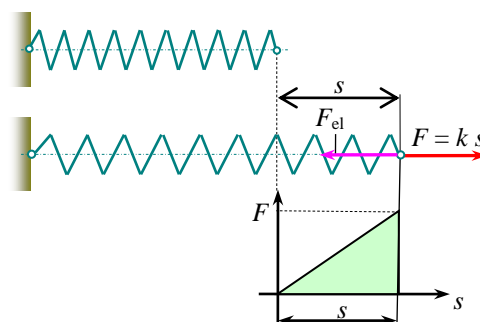
Budući je sila $F = k s$, gdje je k krutost opruge u N/m, to je rad sile.

$$W = \frac{1}{2} k s^2 \quad (5.18.)$$

Međutim, rad unutarnje elastične sile opruge je pri tome

$$W_{el} = -\frac{1}{2} k s^2 \quad (5.19.)$$

jer je sila u opruzi suprotnog smjera od smjera pomaka (produženja) opruge.



Slika 5.10. Rad elastične sile

5.3. Snaga

Snaga je kao i mehanički rad skalarna veličina. Snaga je brzina vršenja mehaničkog rada (ili brzina predaje energije). Srednju snagu definiramo kao omjer između elementarnog rada u pripadnom vremenu.

$$P_{sr} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Granična vrijednost srednje snage kad $\Delta t \rightarrow 0$ je

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Kako je $\Delta W = F_t \Delta s$, slijedi

$$P = F_t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_t v \quad (5.20.)$$

Jedinicu za mjerenje snage dobijemo ako jedinicu za mjerenje rada podijelimo s jedinicom za mjerenje vremena.

$$\text{jedinica snage} = \frac{\text{džul}}{\text{sekunda}} = \text{vat}$$

Dakle, jedinica za mjerenje snage je vat (znak: W). Vat je rad od jednog džula izvršen u jednoj sekundi, $W = J/s$. Kako je vat mala jedinica, u praksi se koriste veće jedinice za snagu, na primjer $kW = 10^3 W$ i $MW = 10^6 W$.

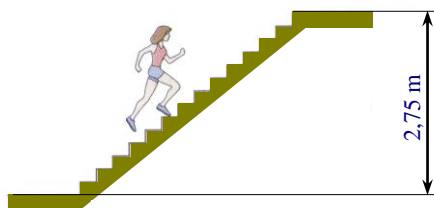
Prije, a i danas ponegdje (naročito motora traktora i vozila), snaga se mjerila u konjskim snagama (znak: KS). Približan odnos između konjske snage i vata odnosno kilovata je sljedeći

$$1 \text{ KS} \approx 736 \text{ W} \quad \text{ili} \quad 1 \text{ KS} = 0,736 \text{ kW} \quad (5.21.)$$

U anglosaksonskim zemljama konjska snaga se obilježavala s HP (horse power; čit. hors pauer). Odnos HP i W je sljedeći; $\text{HP} \approx 746 \text{ W}$.

Primjer 5.4. Djevojka mase 60 kg trčeci se popne stubama za 5 sekundi. Odredite njenu prosječnu snagu.

Rješenje:



Slika 5.11. uz primjer 5.4.

Penjući se djevojka izvrši rad

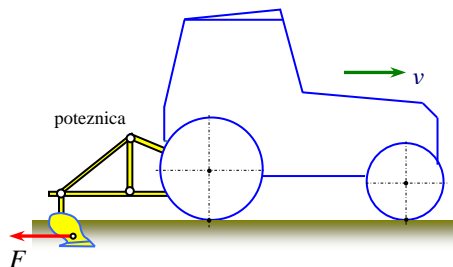
$$W = m g h = 60 \cdot 9,81 \cdot 2,75 \approx 1619 \text{ J}$$

Prosječna snaga djevojke je

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1619}{5} \approx 324 \text{ W}$$

Primjer 5.5. Traktor ore njivu brzinom 6 km/h. Ako je snaga traktora na poteznici 50 KS, kolika je vučna sila (otpor oranja) traktora?

Rješenje:



Slika 5.12. uz primjer 5.5.

Snaga na poteznici (napravi za spajanje pluga na traktor) iznosi

$$P = F \cdot v$$

Vučna sila ili otpor oranja je

$$F = \frac{P}{v} = \frac{50 \cdot 0,736}{6 : 3,6} \approx 22 \text{ kN}$$

5.4. Rad i snaga pri rotaciji tijela

Neka na rukohvatu (slika 2.95.) kružne ploče, koja može rotirati oko osi O, djeluje sila F okomito na polumjer r . Pri rotaciji hvatište sile pomiče se po kružnici. Za mali kut zakretanja $\Delta\varphi$ hvatište sile se pomakne za Δs i pri tome izvrši elementarni rad

$$\Delta W = F \Delta s$$

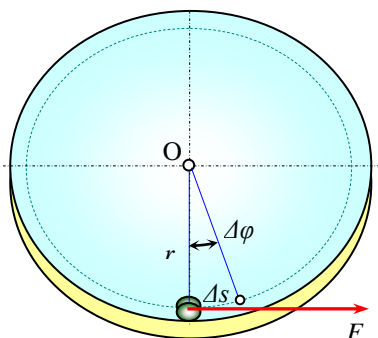
Kako je $\Delta s = r \Delta\varphi$, to je nakon uvrštenja $\Delta W = F r \Delta\varphi$. Umnožak $F r$ je moment sile, kojeg označimo slovom M .

Dakle, elementarni rad pri rotaciji je

$$\Delta W = M \Delta\varphi \quad (5.22.)$$

Pri rotaciji tijela za neki konačni kut φ rad je

$$W = M \varphi \quad (5.23.)$$



Slika 5.13. Mehanički rad pri rotaciji

Znači, rad tijela u rotaciji jednak je umnošku zakretnog (rotacijskog) momenta sile M i kuta rotacije φ .

Analogno se odredi i snaga pri rotaciji

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = M \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = M \omega \quad (5.24.)$$

Prema tome, snaga pri rotaciji jednaka je umnošku zakretnog momenta M i kutne brzine tijela ω .

Ako se kutna brzina izrazi preko brzine vrtnje, snaga pri rotaciji je

$$P = M \frac{\pi n}{30} \approx 0,105 M n \quad (5.25.)$$

otud se može naći zakretni moment ako je poznata snaga P i brzina vrtnje n .

$$M = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{P}{n} \approx 9,55 \frac{P}{n} \quad (5.26.)$$

Primjer 5.6. Mehaničar zakrene T – nosač alata za kut $\varphi = 90^\circ$, prema slici 5.13., pritom upotrijebivši sile u rukama od 120 N. Odrediti rad koji je mehaničar izvršio.

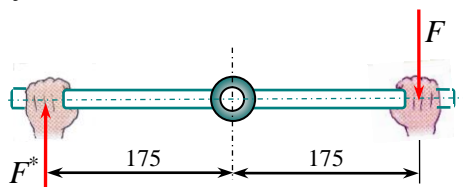
Rješenje:

Mehaničar rukama stvara moment sprega sila

$$M = F h = 120 \cdot 0,35 = 42 \text{ N m}$$

Rad izvršen pri rotaciji za kut $\varphi = 90^\circ$

$$W = M \varphi = 42 \cdot \frac{\pi \cdot 90^\circ}{180^\circ} \approx 66 \text{ J}$$



Slika 5.14. uz primjer 2.46.

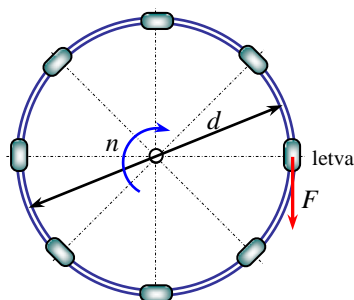
Primjer 5.7. U tehničkim podacima proizvođači automobila, pored ostalog, navode i maksimalni zakretni moment motora, koji on postigne pri određenoj brzini vrtnje. Ako je za neki automobil $M = 280 \text{ N}\cdot\text{m}$ pri $n = 3\,950 \text{ min}^{-1}$, kolika je tada snaga motora?

Rješenje:

$$P = M \omega = M \frac{\pi n}{30} = 280 \frac{\pi \cdot 3\,950}{30} = 115\,820 \text{ W} \quad \text{ili} \quad P = 115,82 \text{ kW}$$

Primjer 5.8. Odrediti udarnu silu letve bubnja kombajna ako bubanj prima od motora snagu 15 kW pri brzini vrtnje $n = 1000 \text{ min}^{-1}$. Bubanj ima promjer 600 mm.

Rješenje:



Slika 5.15. uz primjer 5.8.

Zakretni (rotacijski) moment bubnja

$$M = 9,55 \frac{P}{n} = 9,55 \frac{15\,000}{1000} \approx 143,3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

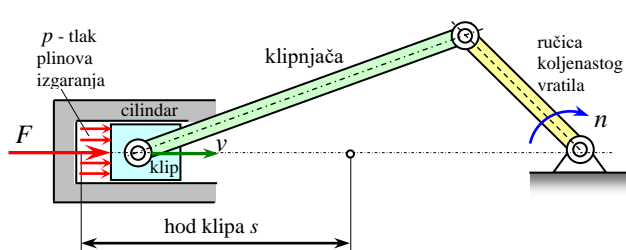
Sila udara letve bubnja o žitnu masu

$$F = \frac{M}{d/2} = \frac{143,3}{0,3} \approx 477,5 \text{ N}$$

Primjer 5.9. Odrediti snagu šesticilindričnog četverotaktnog motora s unutarnjim izgaranjem ako je poznat srednji tlak na čelu klipa $p = 8$ bara, brzina vrtnje zamašnjaka $n = 2000 \text{ min}^{-1}$, promjer $d = 100 \text{ mm}$ i hod klipa $s = 150 \text{ mm}$.

Rješenje:

Snaga motora s unutarnjim izgaranjem (slika 21.13) jednaka je umnošku sile koja nastaje od tlaka plinova izgaranja na čelu klipa i srednje brzine klipa.



$$P = Fv = p \underbrace{\frac{d^2\pi}{4}}_{\text{sila}} \cdot \underbrace{\frac{2s \cdot n}{60}}_{\text{brzina}} = p \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{sn}{30}$$

Ako se uzme u obzir broj cilindara i taktnost motora, konačna jednačba za srednju snagu na klipovima motora u vatima glasi

$$P = p \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{sn}{30} \cdot \frac{z}{i}$$

Slika 5.16 Određivanje snage na čelu klipa motora-uz primjer 5.9

gdje je: p – srednji tlak na čelu klipa, Pa

d – promjer klipa, m

s – hod klipa od gornje do donje mrtve točke, m

n – brzina vrtnje koljenastog vratila, min^{-1}

z – broj cilindara motora

i – taktnost motora, $i = 2$ za dvotaktni, $i = 4$ za četverotaktni.

U našem primjeru snaga motora iznosi

$$P = p \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{sn}{30} \cdot \frac{z}{i} = 8 \cdot 10^5 \frac{0,1^2\pi}{4} \cdot \frac{0,15 \cdot 2000}{30} \cdot \frac{6}{4} \approx 94,25 \cdot 10^3 \text{ W ili } P = 94,25 \text{ kW.}$$

5.5. Stupanj mehaničkog djelovanja

Snaga koju razvije, na primjer, motor traktora ne može se u potpunosti iskoristiti na pogonskim kotačima zbog gubitaka koji nastaju savladavanjem mehaničkih otpora (trenja u ležajevima!).

Omjer između efektivne ili korisne P_e i indicirane ili utrošene P_i snage naziva se mehanički stupanj djelovanja

$$\eta = \frac{P_e}{P_i} \quad (5.27.)$$

Stupanj mehaničkog djelovanja η (grčko slovo – eta) uvijek je manji od 1,0, a može se izraziti i u postocima (tada je uvijek manji od 100%). Stupanj mehaničkog djelovanja može se, također, definirati i kao omjer između efektivnog W_e i indiciranog W_i mehaničkog rada.

Ako se stroj ili agregat sastoji od više sklopova ili strojeva (na primjer kod traktora je to motor, mjenjač i diferencijal), onda je ukupni stupanj mehaničkog djelovanja jednak umnošku pojedinačnih stupnjeva mehaničkog djelovanja

$$\eta = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \quad (5.28.)$$

Primjer 5.10. Snaga sa zamašnjaka motora prenosi se preko spojke, mjenjača, kardanskog vratila i diferencijala na pogonske kotače. Ako je snaga motora $P_m = 60$ kW kolika je snaga na pogonskom kotaču, ako je stupanj mehaničkog djelovanja mjenjača $\eta_{mj} = 0,94$ i diferencijala $\eta_d = 0,96$. Koliki je zakretni moment ako je brzina vrtnje kotača 145 min^{-1} ?

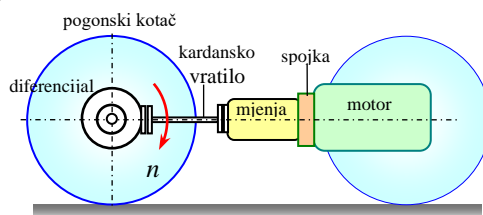
Rješenje:

Snaga na pogonskim kotačima

$$P_k = P_m \eta_{mj} \eta_d = 60 \cdot 0,94 \cdot 0,96 \approx 54,14 \text{ kW}$$

Zakretni moment na pogonskim kotačima

$$M_k = 9,55 \frac{P_k}{n_k} = 9,55 \cdot \frac{54,14 \cdot 10^3}{145} \approx 3566 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Slika 5.17. uz primjer 5.10.

Da bi se mogao realizirati zakretni moment na pogonskim kotačima mora sila prijanjanja, ili sila statičkog trenja između pogonskih kotača i podloge (ceste), biti veća ili jednaka obodnoj sili, koja je jednaka omjeru zakretnog momenta i polumjera kotača (vidi odjeljak 2.12.-Trenje kotrljanja).

5.6 Mehanička energija

Energija je sposobnost čestice (tijela) da vrši rad. Kad tijelo (čestica) vrši rad, energija mu se smanjuje. Postoje dvije osnovne forme mehaničke energije, potencijalna i kinetička energija.

Potencijalna energija je ona energija koju tijelo ima zbog svog položaja. Potencijalna energija sile teže tijela, nazvana i gravitacijska energija, je sposobnost čestice (tijela) da vrši rad pri pomaku (spuštanju) s neke visine u nulti položaj.

$$E_{pg} = G h = m g h \quad (5.29.)$$

gdje je G - težina tijela, h - visina spuštanja (pomak ili visinska razlika).

Rastegnuta ili pritisnuta opruga ima elastičnu potencijalnu energiju, koja se povratkom opruge u nulto stanje pretvara u mehanički rad.

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k s^2 \quad (5.30.)$$

gdje je k - konstanta opruge (elastičnog tijela), s - produljenje ili skraćenje opruge (elastičnog tijela).

Kinetička energija čestice (tijela) je energija gibanja. To je onaj rad koji može izvršiti čestica ako se brzina čestice smanji do nule.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.31.)$$

gdje je m - masa čestice, v - brzina.

Potencijalna i kinetička energija su skalarne veličine. Budući da energija može prelaziti u mehanički rad, a vrijedi i obrnuto, jedinica za mjerenje energije jednaka je jedinici za mjerenje rada. Prema tome, energija se mjeri u džulima (znak: J) i njegovim decimalnim jedinicama.

U tehnici i svakodnevnici se kao jedinica energije (rada) često koristi kilovatsat (znak: kWh) i megavatsat (znak: MWh). Pritom je $1 \text{ kWh} = 3\,600 \text{ kJ}$, odnosno $1 \text{ MWh} = 3\,600 \text{ MJ}$.

Primjer 5.11. Odrediti kinetičku energiju čovjeka mase 80 kg koji hoda brzinom 6 km/h.

Rješenje:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 80 \cdot \left(\frac{6}{3,6}\right)^2 \approx 111 \text{ J}$$

Pri **translaciji tijela** brzine svih čestica tijela, kao i težišta tijela, međusobno su jednake. Stoga je kinetička energija tijela u translaciji.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5.32.)$$

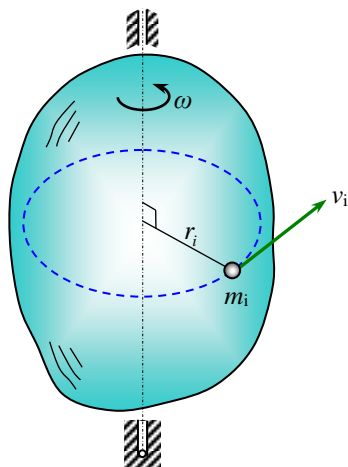
gdje je: m - masa tijela, v - brzina tijela (težišta).

U **rotaciji tijela** oko osi (slika 5.18.), kinetička energija čestice mase m_i iznosi

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Kako je brzina čestice $v_i = r_i \omega$ to je

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$



Zbroje li se kinetičke energije svih čestica tijela u rotaciji, nalazimo

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Veličina $\sum m_i r_i^2$ je suma umnoška pojedinačnih masa svake čestice i kvadrata njihove udaljenosti od osi rotacije.

Ta veličina naziva se **dinamički moment tromosti ili inercije**, i označava slovom I .

Prema tome, kinetička energija tijela u **rotaciji** je

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (5.33.)$$

Slika 5.18. Kinetička energija tijela u rotaciji

gdje je I - dinamički moment tromosti ili inercije, ω - kutna brzina tijela.

Budući je **ravninsko gibanje** tijela sastavljeno od translacije i rotacije, kinetička energija tog gibanja jednaka je zbroju kinetičke energije translacije i rotacije tijela

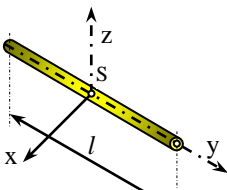
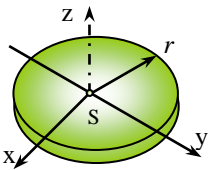
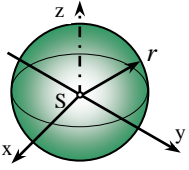
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (5.34.)$$

gdje je m - masa tijela, I - dinamički moment tromosti oko osi kroz težište tijela, v - brzina težišta tijela, ω - kutna brzina tijela.

Dinamički moment inercije, pri rotaciji tijela, ima analognu ulogu inertnosti tijela kao što masa tijela ima pri translaciji tijela. Dinamički moment tromosti ili inercije mjeri se u $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

Niže ćemo navesti, bez dokazivanja, dinamičke momente inercije štapa, valjaka (kružne ploče, diska) i kugle za os rotacije z .

Tablica 5.1. Moment tromosti štapa, valjka (diska) i kugle

 <p style="text-align: center;">$I_z = \frac{1}{12}ml^2$</p>	 <p style="text-align: center;">$I_z = \frac{1}{2}mr^2$</p>	 <p style="text-align: center;">$I_z = \frac{2}{5}mr^2$</p>
--	---	--

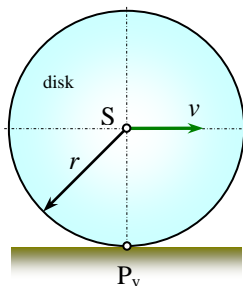
Primjer 5.12. Kolika je kinetička energija bubnja kombajna, dinamičkog momenta inercije $I = 8,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, koji rotira s $n = 1100 \text{ min}^{-1}$?

Rješenje:

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{\pi \cdot n}{30}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 8,6 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 1100}{30}\right)^2 \approx 57,1 \text{ kJ}$$

Primjer 5.13. Kolika je kinetička energija diska (kružne ploče) mase 5 kg koji se kotrlja bez klizanja brzinom $v = 10 \text{ m/s}$?

Rješenje:



Slika 5.19. uz primjer 5.13.

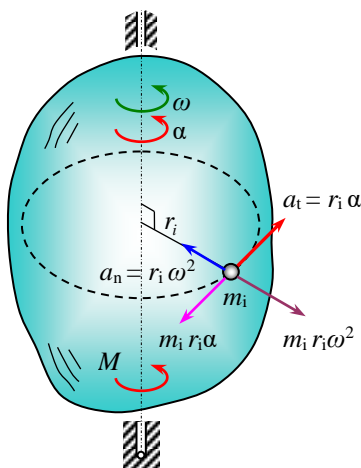
$$E_k = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{translacija}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{rotacija}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2$$

Odnosno

$$E_k = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4} \cdot 5 \cdot 10^2 = 375 \text{ J}$$

5.7. Dinamička jednadžba rotacije tijela

Tijelo će rotirati oko nepomične osi jednoliko ubrzano (usporeno), samo ako na nj djeluje stalni rotacijski moment M . Pritom će na svaku česticu tijela u skladu s d'Alembertovim principom djelovati normalna i tangencijalna komponenta inercijske sile (slika 5.20.).



Slika 5.20. Dinamička jednadžba rotacije tijela

Moment inercijskih sila za os rotacije i - te čestice, mase m_i , iznosi

$$M_i = \underbrace{m_i r_i}_{\text{sila}} \alpha \underbrace{r_i}_{\text{krak}}$$

Zbrojeno za cijelo tijelo je

$$M = \alpha \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Budući je $\sum m_i r_i^2 = I$ - dinamički moment inercije, to je konačno

$$M = I \alpha \tag{5.35.}$$

Dakle, rotacijski moment M jednak je umnošku dinamičkog momenta inercije I za os rotacije i kutnog ubrzanja tijela α .

Primjer 5.14. Bubanj kombajna momenta tromosti ili inercije $8,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ treba ubrzati iz stanja mirovanja do brzine vrtnje $n = 1100 \text{ min}^{-1}$ u vremenu $t = 20 \text{ s}$. Ako se trenje u ležajevima zanemari, treba naći potreban zakretni moment.

Rješenje:

Kutno ubrzanje

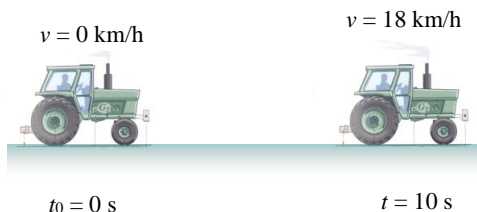
$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30 t} = \frac{\pi \cdot 1100}{30 \cdot 20} = 5,76 \text{ s}^{-2}$$

Rotacijski ili zakretni moment

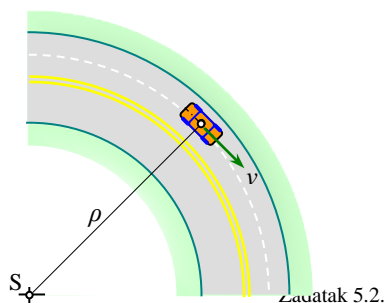
$$M = I \alpha = 8,6 \cdot 5,76 \approx 49,53 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Zadatci-kinetika

Zadatak 5.1. Traktor težine 80 kN za 10 s postigne iz stanja mirovanja brzinu od 18 km/h . Ako otpor vožnje iznosi 5% njegove težine, kolika je vučna sila i ubrzanje traktora? (Odgovor: $F = 8078 \text{ N}$; $a = 0,5 \text{ m/s}^2$)



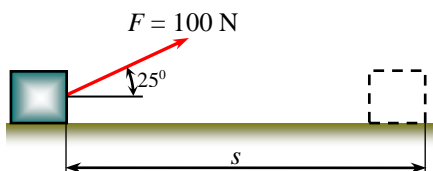
Zadatak 5.1.



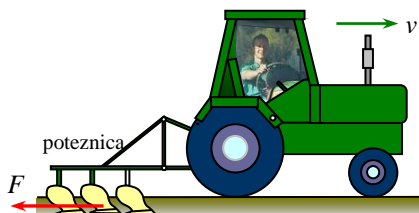
Zadatak 5.2.

Zadatak 5.2. Kolikom brzinom smije voziti automobil mase 1000 kg ako je polumjer zavoja 100 m i dopuštena inercijska sila 2 000 N? (Odgovor: $v = 14,14$ m/s ili $v = 50,9$ km/h)

Zadatak 5.3. Sila F nagnuta pod kutom $\alpha = 25^\circ$ izvrši rad od 200 J, koliki je prijeđeni put s ? (Odgovor: $s = 2,21$ m)



Zadatak 5.3.



Zadatak 5.4.

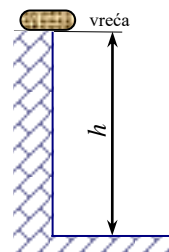
Zadatak 5.4. Traktor ore njivu brzinom 5 km/h i za vrijeme od tri sata izvrši koristan rad od 300 MJ. Odrediti vučnu silu traktora i vučnu snagu traktora. (Odgovor: $F_v = 20$ kN; $P_v \approx 27,8$ kW)

Zadatak 5.5. Traktor ore njivu brzinom 7,2 km/h i pri tome razvije vučnu silu $F = 30$ kN. Kolika je vučna snaga traktora na poteznici? Kolika je snaga motora traktora ako je stupanj iskorištenja od motora do poteznice 0,75? (Odgovor: $P_{\text{pot}} = 60$ kW i $P = 80$ kW)

Zadatak 5.6. Motor automobila razvije snagu 75 kW kad automobil postigne brzinu od 150 km/h na horizontalnom putu. Ukupni otpor kotrljanja i otpor zraka može se opisati izrazom $F_d = 180 + 0,6v + 0,06v^2$, gdje je sila u N, a brzina u km/h. Koliki su gubici u transmisiji od motora do pogonskog kotača? (Odgovor: 10 %)



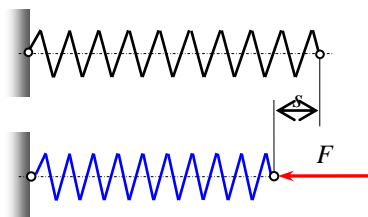
Zadatak 5.6.



Zadatak 5.7.

Zadatak 5.7. Na kojoj se visini h nalazi vreća mase 50 kg ako je njena potencijalna energija prema podu 2,5 kJ? (Odgovor: $h = 5,1$ m)

Zadatak 5.8. Kolika je sila F i kolika je potencijalna energija spremljena u oprugu ako se ona stisne za 2 cm? Konstanta opruge $k = 10$ N/mm. (Odgovor: $F = 200$ N, $W = 2$ J).



Zadatak 5.8.



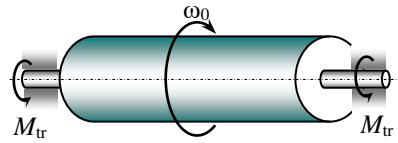
Zadatak 5.9.

Zadatak 5.9. Ako traktor mase 4000 kg ima kinetičku energiju 50 kJ, kolikom brzinom vozi? (Odgovor: $v = 5$ m/s)

Zadatak 5.10. Automobil mase 1000 kg na putu $s = 300$ m poveća brzinu sa 36 km/h na 72 km/h. Kolika je za to potrebna dodatna pogonska sila? (Odgovor: $F = 500$ N)



Zadatak 5.10.



Zadatak 5.11.

Zadatak 5.11. Rotor s momentom tromosti ili inercije $I = 4$ kg·m² u trenutku kad se isključi pogon ima kutnu brzinu $\omega_0 = 50$ s⁻¹. Odrediti vrijeme nakon kojeg će se rotor zaustaviti ako moment trenja u obadva ležaja iznosi 2 Nm. (Odgovor: $t = 100$ s)

6. MEHANIKA FLUIDA

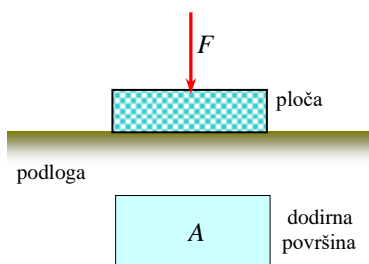
Mehanika fluida (ili hidromehanika) je znanost koja proučava ravnotežu (mirovanje) i gibanje (strujanje) fluida, koje je zajedničko ime za tekućine i plinove do određene granice, kad se pojava stlačivosti više ne može zanemariti. Mehanika fluida se dijeli na statiku i dinamiku fluida. Statika fluida proučava ravnotežu sila koje djeluju na fluid u stanju mirovanja. Dinamika fluida je znanost o gibanju fluida zbog djelovanja sila. Praktična primjena hidromehanike na realne tekućine, uz znatno korištenje praktičnih rezultata pokusa je hidraulika. Tekućina neznatno mijenja svoj volumen pri promjeni tlaka, ali mijenja svoj oblik prema posudi u kojoj se nalazi. Idealna tekućina je bez unutarnjeg trenja (viskoznosti). Ona je praktički nestlačiva.

6.1. Tlak

Za razliku od mehanike krutih tijela u mehanici fluida ne postoje koncentrirane sile. U mehanici fluida sile se dijele na volumenske i površinske. Volumenske sile su na primjer težina i inercijska sila tekućine. Djelovanje djelića fluida međusobno kao i fluida na čvrsta tijela ostvaruje se preko površine. Prisjetimo se djelovanja izgorjelih plinova na čelo klipa kod motora s unutarnjim izgaranjem.

Jedna od temeljnih veličina mehanike fluida je tlak. Da bismo shvatili pojam tlaka razmotrimo djelovanje sile F na ploču na vodnu podlogu (slika 6.1.). Očito se djelovanje sile F na podlogu prenosi preko dodirne površine A . Omjer između sile F i dodirne površine A naziva se tlak.

$$p = \frac{F}{A} \quad (6.1.)$$



Slika 6.1. Definicija tlaka

Tlak je skalarna veličina, a mjeri se u N/m^2 koji se naziva paskal (znak: Pa). Dakle, $\text{Pa} = \text{N/m}^2$.

Jedinica za mjerenje tlaka, paskal, je mala jedinica, pa se često koriste veće jedinice od paskala. Na primjer:

kilopaskal (znak kPa)	1 kPa = 10^3 Pa,
megapaskal (znak: MPa)	1 MPa = 10^6 Pa,
bar (znak bar)	1 bar = 10^5 Pa,
milibar (znak: mbar)	1 mbar = 10^2 Pa.

Jedinicu mbar možemo shvatiti i kao posebno ime za 100 Pa ili za jedinicu hektopaskal (znak: hPa = 10^2 Pa). Dakle, vrijedi da je 1 hPa = 1 mbar. U prognozi vremena obično tlak izražavaju u hektopaskalima.

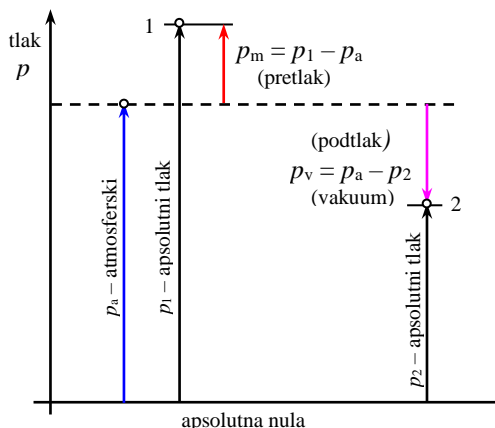
Normirani atmosferski tlak p_a pod uobičajenim meteorološkim uvjetima na razini mora iznosi 101 325 Pa ili 101,325 kPa ili 1,01325 bara, odnosno 1013,25 hPa.

Anglosaksonske zemlje za tlak koriste jedinicu psi (pound-force per square inch). Vrijedi odnos: 1 psi \approx 6,895 kPa.

Atmosferski tlak, pretlak i podtlak (vakuum)

Razlikujemo nekoliko vrsta tlakova koje susrećemo u svakodnevnom životu i tehničkoj praksi. Lokalni atmosferski tlak ili barometarski tlak mjerimo barometrom od apsolutne nule. On može biti nešto veći ili manji od normiranog atmosferskog tlaka, što ovisi o nadmorskoj visini i meteorološkim uvjetima.

Uređaji za mjerenje pretlaka nazivaju se manometri, a za mjerenje podtlaka vakuumetri.



Slika 6.2. Atmosferski tlak, apsolutni tlak, pretlak i podtlak

Manometrom mjerimo pretlak (ponegdje nazvan nadtlak) p_m . Da bismo dobili apsolutni tlak p , tada pretlaku p_m trebamo pridodati atmosferski tlak p_a .

$$p = p_a + p_m \quad (6.2.)$$

Vakuometrom mjerimo podtlak p_v . Da bismo dobili apsolutni tlak p , tada od atmosferskog tlaka p_a treba oduzeti podtlak p_v .

$$p = p_a - p_v \quad (6.3.)$$

Apsolutna vrijednost potlaka naziva se vakuum i često se izražava u postocima atmosferskog tlaka.

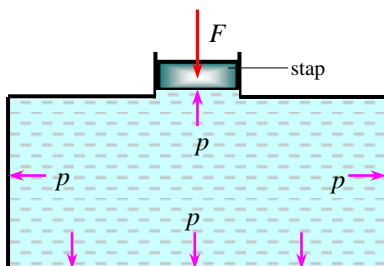
6.2. Pascalov zakon

U posudi (slika 6.3.) napunjenoj tekućinom i zatvorenom stapom, pri djelovanju sile F na stap, prenosi se tlak s površine stapa kroz tekućinu na sve strane podjednako. Dakle, narinuti tlak širi se u tekućini u svim smjerovima u istom iznosu. Ovo je poznati Pascalov zakon.

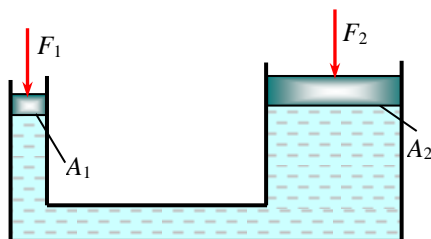
Pascalov zakon ilustrirat ćemo primjerom hidrauličke dizalice (preše). Hidraulička dizalica (slika 6.4.) služi da bi se upotrebom relativno malih sila mogle postići znatno veće sile.

Tlačenjem silom F_1 na manji stap površine A_1 stvara se u tekućini tlak

$$p = F_1 / A_1$$



Slika 6.3. Ilustracija Pascalova zakona



Slika 6.4. Hidraulička dizalica

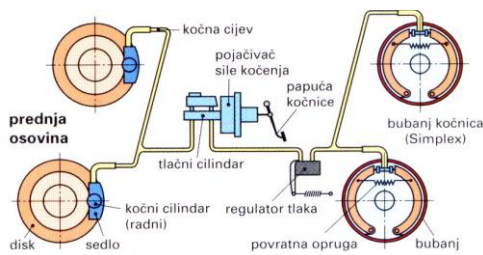
Taj tlak se u skladu s Pascalovim zakonom širi po tekućini u svim smjerovima i djeluje na veći stap površine A_2 , na koji djeluje sila F_2 . Očito je ravnotežno stanje

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{ili}$$

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \quad (6.4.)$$

Dakle, koliko je puta površina većeg stapa A_2 veća od površina manjeg stapa A_1 , toliko je puta sila F_1 manja od sile F_2 .

Opisani hidraulički prijenos sile primjenjuje se kod mnogih uređaja i strojeva, pa tako i kod poljoprivrednih strojeva. Na slici 6.5. je shematski prikazan uređaj za kočenje motornih vozila.



Slika 6.5. Hidraulički prijenos sile kod kočnica motornog vozila

Pritiskom vozačeve noge, preko papuče kočnice, na stap u tlačnom cilindru prenosi se tlak na uljnu tekućinu. Zatim se tlak uljem prenosi do radnih ili kočnih cilindara na pritiskujuće radne stapove. Radni stapovi pritišću pločice na disk, odnosno čeljusne obloge na bubanj, koji su čvrsto vezani za kotače. I na taj se način vrši usporavanje vrtnje kotača, odnosno kočenje kotača vozila.

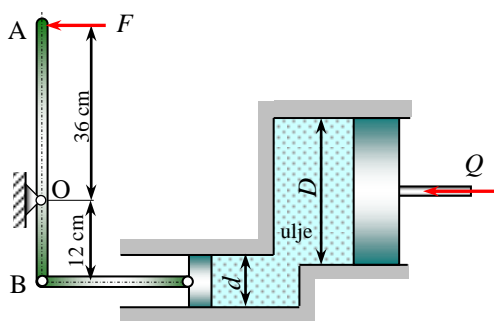
Primjer 6.1. Sila $F = 200 \text{ N}$ djeluje na štap AB, koji može zakretati oko okretišta O (slika 6.6.). Kraj štapa B spojen je za stap promjera $d = 60 \text{ mm}$. Kolika je sila Q koja djeluje na većem stap promjera $D = 300 \text{ mm}$?

Rješenje:

Silu na malom stapu odredimo iz momentne jednadžbe za okretište O.

$$\sum M_O^{F_i} = F \cdot 36 - F_S \cdot 12 = 0$$

Odavde je sila na malom stapu



Slika 6.6. uz primjer 6.1.

$$F_S = \frac{36}{12} \cdot F = \frac{36}{12} \cdot 200 = 600 \text{ N}$$

Tlak ulja u cilindru

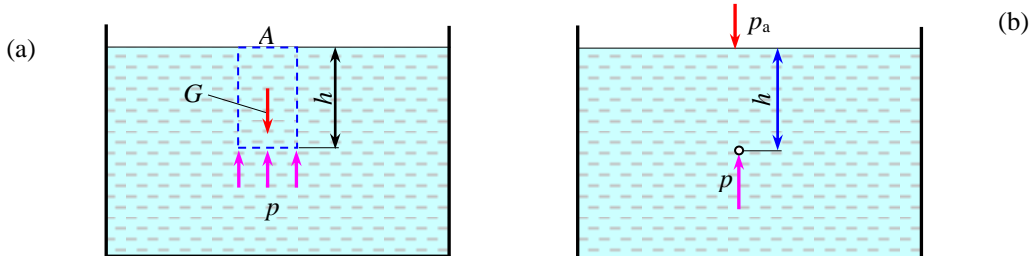
$$p = \frac{F_S}{\frac{d^2 \pi}{4}} = \frac{Q}{\frac{D^2 \pi}{4}}$$

Odavde nalazimo silu na većem stapu

$$Q = \left(\frac{D}{d}\right)^2 F_S = 25 \cdot 600 = 15000 \text{ N}$$

6.3. Hidrostatski tlak i tlak na dubini

Hidrostatski tlak je tlak u tekućini, koji je posljedica same težine tekućine. Naime, ovaj tlak nastaje otuda što dublji slojevi tekućine nose težinu tekućine iznad njih.



Slika 6.7. Hidrostatski tlak i tlak na određenoj dubini

Neka na površini tekućine u posudi nema nikakva tlaka (slika 6.7.a). Zamislimo valjak tekućine površine A i visine h . U težištu tog valjka djeluje težina tekućine G prema dolje, a na dubini h prema gore tlak p tekućine. Budući da tekućina miruje, sile su u ravnoteži.

$$G = Ah\rho g = Ap$$

odatle je

$$p = h\rho g \quad (6.5.)$$

Dakle, hidrostatski tlak razmjernan je dubini h i gustoći ρ tekućine, te Zemljinom ubrzanju g . Visina stupca tekućine h , koja proizvodi tlak p , naziva se visina tlaka ili pijezometarska visina.

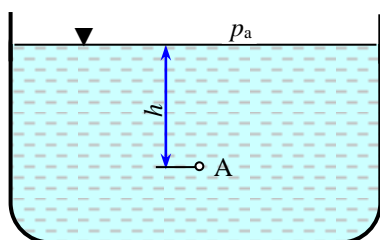
Ako na površini tekućine (slika 6.7.b) djeluju atmosferski tlak p_a , koji se sukladno Pascalovim zakonom rasprostire cijelom tekućinom, tada na dubini h vlada tlak

$$p = p_a + h\rho g \quad (6.6.)$$

Prema tome, kad na tekućinu djeluje atmosferski tlak, onda je na dubini h tlak jednak zbroju atmosferskog tlaka p_a i hidrostatskog tlaka $h\rho g$.

Primjer 6.2. Koliki je tlak u točki A spremnika napunjenog vodom ako je $h = 5$ m. Iznad slobodne površine djeluje atmosferski tlak od 100 kPa?

Rješenje:



Slika 6.8. uz primjer 6.2.

Sukladno jednadžbi (6.6.) računamo

$$p_A = p_a + \rho gh = 100 \cdot 10^3 + 1000 \cdot 9,81 \cdot 5$$

$$p_A = 149\,050 \text{ Pa}$$

ili

$$p_A \approx 149 \text{ kPa}$$

6.4. Jednadžba kontinuiteta

Protjecanje ili strujanje je uobičajen naziv za gibanje tekućine. Putanja čestice tekućine naziva se strujnica. Smjer brzine čestice tekućine podudara se sa smjerom strujnice. Iznos brzine može se predočiti gustoćom strujnica. Kod cijevi promjenjivog presjeka, na užim mjestima su strujnice gušće - tu je i brzina veća. Vrijedi i obrnuto, u širim presjecima strujnice su rjeđe pa je brzina manja. Strujanje tekućine može biti stacionarno, brzina tekućine je neovisna o vremenu, ili nestacionarno, ako je brzina ovisna o vremenu.

Neka kroz cijev promjenjivog presjeka (slika 6.9.) struji tekućina tako da je količina protoka

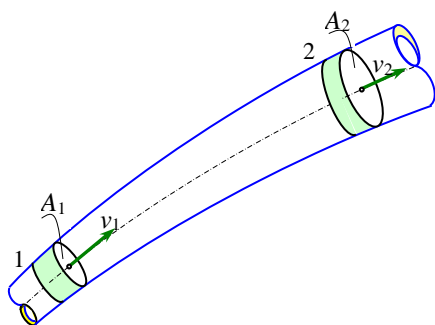
$$Q = Av \quad (6.7.)$$

gdje je A - površina poprečnog presjeka cijevi

v - brzina strujanja

Volumenski protok fluida Q mjeri se u m^3/s i drugim jedinicama, na primjer dm^3/s ili l/s ; l/min ili L/min ; m^3/h . Maseni protok fluida $Q_m = \rho Q$ mjeri se u kg/s . Težinski protok fluida $Q_g = \gamma Q = \rho g Q$ mjeri se u N/s .

U presjecima 1 i 2, površina A_1 i A_2 s pripadnim brzinama v_1 i v_2 , je isti protok



Slika 6.9. Jednadžba kontinuiteta

$$Q_1 = Q_2$$

odnosno

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (6.8.)$$

Dakle, količina tekućine koja uđe na jednom presjeku jednaka je količini tekućine koja iziđe na drugom presjeku. Relaciju (6.8) se naziva jednadžba kontinuiteta. Ona se može zapisati i ovako

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \quad (6.9.)$$

Omjer brzina presjeka jednak je obrnutom omjeru površine presjeka.

Primjer 6.3. Pomoću gumene cijevi s pričvršćenom mlaznicom puni se vodom posuda od 12 L. Ako je vrijeme punjenja 20 s, koliki je protok? Kolika je brzina strujanja vode u cijevi i na izlazu mlaznice, ako je unutarnji promjer cijevi 2 cm a izlaza mlaznice 8 mm?

Rješenje:

Volumenski protok vode

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{20} = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

ili $Q = 0,6 \text{ L/s}$

Brzina strujanja vode kroz cijev

$$v_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{0,02^2 \pi} \approx 1,91 \text{ m/s}$$

Brzina strujanja vode na izlazu iz mlaznice

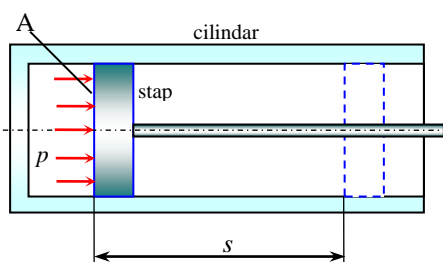
$$v_m = \frac{Q}{A_m} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 10^{-3}}{0,008^2 \pi} \approx 11,94 \text{ m/s}$$



Slika 6.10. uz primjer 6.3.

6.5 Energija tekućine i Bernoullijeva jednadžba

Mehanička energija tekućine sadržana je u tri oblika; u obliku kinetičke energije E_k , potencijalne energije položaja E_{pg} i potencijalne energije tlaka E_{pt} .



Slika 6.11. Potencijalna energija tlaka tekućine

Izrazi za brzinu ili kinetičku energiju

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \text{ i potencijalne energije položaja } E_{pg} = m g h \text{ već su nam poznati.}$$

Izraz za potencijalnu energiju tlaka E_{pt} dobit ćemo razmatranjem gibanja stapa u cilindru (slika 6.11.), koji je spojen s cijevi kroz koju struji fluid/tekućina pod tlakom p .

Fluid u cilindru pod tlakom p pritišće na stap silom $F = p A$ odnosno na pomaku s obavlja rad $W = F s = p A s$.

Dakle, rad može obaviti samo tekućina koja ima tlačnu energiju. Rad $W = E_{pt} = p A s$ je izvršila tekućina koja ispunjava volumen $A s$ i koja ima masu $m = V \rho = A s \rho$.

Nakon uvrštavanja slijedi

$$E_{pt} = p A s = m \frac{p}{\rho} \quad (6.10.)$$

Ukupna energija mase m tekućine iznosi

$$E = E_k + E_{pg} + E_{pt} = m \left(\frac{v^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho} \right) \quad (6.11.)$$

Ako relaciju (6.11.) podijelimo masom m dobit ćemo energiju jedinice mase tekućine

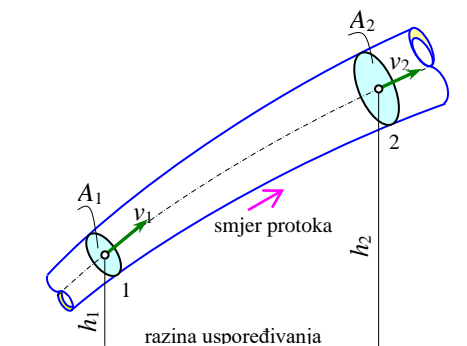
$$e_m = \frac{E}{m} = \frac{v^2}{2} + g h + \frac{p}{\rho} \quad (6.12.)$$

Dijeljenjem energije tekućine (6.11.) težinom mg dobijemo energiju jedinice težine tekućine

$$e_g = \frac{E}{mg} = \frac{v^2}{2g} + h + \frac{p}{\rho g} \quad (6.13.)$$

Bernoullijeva jednadžba

Ako kroz cijev promjenjiva presjeka stacionarno struji idealna tekućina (slika 6.12.) zbroj enegije položaja, brzinske enegije i tlačne enegije za sve presjeke je konstanta.



Slika 6.12. Bernoullijeva jednadžba

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g h_2 = \text{konst.}$$

ili općenito

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + g h = C \quad (6.14.)$$

Jednadžba (6.14.) naziva se Bernoullijeva jednadžba.

Pojedini članovi jednadžbe (6.14.) imaju jedinicu m^2/s^2 . Ako se jednadžba (6.14.) pomnoži s gustoćom ρ , dobit će se

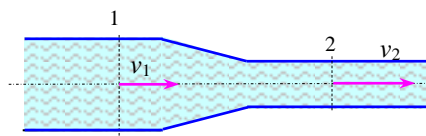
$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g h = C_1 \quad (6.15.)$$

Sada svi članovi jednadžbe imaju jedinicu tlaka Pa. Napokon, ako se jednadžba (6.14.) podijeli s g imamo

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = C_2 \quad (6.16.)$$

Sada svi članovi jednadžbe imaju jedinicu visine m (metar). Prvi član $\frac{p}{\rho g} = \frac{p}{\gamma}$ naziva se visina tlaka, drugi član $\frac{v^2}{2g}$ visinska brzina, a treći član h označava geodetsku visinu.

Primjer 6.4. Na vodovodnoj cijevi izmjereni su tlakovi $p_1 = 2,4$ bara i $p_2 = 1,8$ bara, na dva mjesta u kojima su presjeci $A_1 = 100 \text{ cm}^2$ i $A_2 = 50 \text{ cm}^2$. Kolike su brzine u presjecima i koliki je protok?



Slika 6.13. uz primjer 6.4.

Rješenje:

Iz jednadžbe kontinuiteta (6.8.) proizlazi

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \frac{50}{100} v_2 = 0,5 v_2$$

Ako Bernoullijevu jednadžbu (6.15.)

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

preuredimo u

$$p_1 - p_2 = \rho \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right)$$

i unesemo vrijednosti

$$(2,4 - 1,8) \cdot 10^5 = \frac{1000}{2} [v_2^2 - (0,5v_2)^2]$$

slijedi brzina u presjeku 2

$$0,6 \cdot 10^5 = 500 \cdot 0,75 v_2^2 \Rightarrow v_2 = 12,65 \text{ m/s}$$

odnosno brzina u presjeku 1

$$v_1 = 0,5 v_2 = 0,5 \cdot 12,65 \approx 6,32 \text{ m/s}$$

Protok vode je

$$Q = A_1 v_1 = 100 \cdot 10^{-4} \cdot 6,32 = 0,0632 \text{ m}^3/\text{s} \quad \text{ili} \quad Q = 63,2 \text{ L/s}$$

6.6. Vrste strujanja i Reynoldslov broj

Razlikujemo dva načina strujanja realnog fluida u pogledu rasporeda brzina i otpora; laminarno i turbulentno. Laminarno ili slojevito strujanje je gibanje fluida u slojevima koji se ne miješaju. Pri turbulentnom strujanju slojevi se fluida međusobno miješaju. Na glavno strujanje uzduž

cijevi se pojedine čestice gibaju poprečno, tako da uzrokuju miješanje slojeva. Turbulentno strujanje redovita je pojava u tehničkoj praksi. Laminarno strujanje vrlo je rijetko, a javlja se pri podmazivanju, strujanju podzemnih voda, toplovodnih sustava i drugih strujanja s malim brzinama.

Reynolds je pokusima ustanovio da laminarno strujanje fluida prelazi kod izvjesne kritične brzine u turbulentno strujanje. Temeljem omjera između inercijskih i viskoznih sila došao je do formule, koja se naziva Reynoldsov broj.

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} \quad (6.17.)$$

gdje je: Re – Reynoldsov broj, bezdimenzionalna veličina

v – brzina strujanja, m/s

D – promjer cijevi (unutarnji!), m

$\nu = \mu/\rho$ – kinematička viskoznost (dinamička viskoznost podijeljena s gustoćom fluida), m²/s

Ako je $\text{Re} < 2320$ strujanje fluida je laminarno. Za $\text{Re} > 2320$ strujanje je turbulentno. U području Reynoldsova broja između 2 000 i 4 000 moguća su oba načina strujanja – to je kritično područje.

6.7. Linijski i lokalni gubici u cijevima

U strujanju realnog fluida nastaju gubici (pad potencijalne energije fluida!) zbog unutarnjeg trenja između pojedinih djelića fluida u strujanju različitim brzinama i zbog trenja između stijenke cijevi i fluida. Pad tlaka zbog savladavanja trenja nalazimo poznatom Darcy-Weissbachovu formulu za gubitke trenja pri strujanju fluida u cijevi.

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \rho \frac{v^2}{2} \quad (6.18.)$$

gdje je: λ (čitaj: lamda) – bezdimenzionalni koeficijent otpora trenja

L – duljina cijevi, m; D – promjer cijevi, m; ρ – gustoća fluida, kg/m³; v – brzina strujanja, m/s

Formula (6.18.) se najčešće koristi u obliku iz kojeg se može izračunati visina gubitka

$$h_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (6.19.)$$

Koeficijent otpora trenja λ određuje se eksperimentalno, osim kada je riječ o laminarnom strujanju ili o turbulentnom strujanju u hidraulički glatkim cijevima. Tada je koeficijent λ funkcija samo od Re broja. Kod turbulentnog strujanja u hidraulički hrapavim cijevima koeficijent λ zavisi i od Re broja i od relativne hrapavosti cjevovoda i ne može se točno teorijski odrediti. Koeficijent otpora λ računamo prema formulama ili najčešće očitavamo iz Moodyeva dijagrama.

Lokalni gubici strujne energije nastaju zbog promjene pravca gibanja, veličine i oblika protočnog presjeka. Kako promjene poprečnog presjeka po pravcu, obliku i veličini nastaju na mjestima suženja, proširenja, na lukovima, koljenima, usisnom košu, T- račvama i na drugim mjestima gdje se ugrađuje armatura cjevovoda (ventili, zasuni), to se na tim mjestima javljaju lokalni gubici

$$h_L = K \frac{v^2}{2g} \quad (6.20.)$$

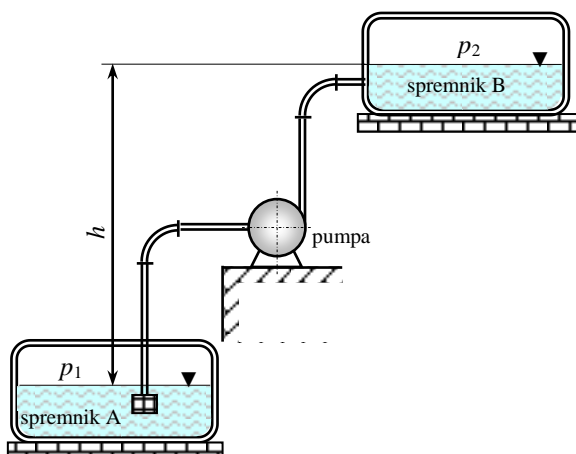
gdje je v - brzina iza ugrađene naprave, K – koeficijent lokalnog otpora, koji ovisi o ugrađenoj napravi ili armaturi.

U priručnicima se koeficijent lokalnog otpora često izražava pomoću ekvivalentne duljine cijevi $L_e = KD/\lambda$.

6.8. Ukupni otpor cjevovoda i snaga pumpe

Pumpa je uređaj koji mehaničku energiju od motora transformira u energiju fluida (hidrauličku energiju). Pumpe služe za prijenos tekućine s nižeg na viši položaj ili s nižeg na viši tlak ili oboje. Kod prskalica služe za postizanje znatnije izlazne brzine iz mlaznice. Bernoullijeva jednadžba i jednadžba kontinuiteta čine osnovu za rješavanje problema koje spadaju u područje praktične mehanike fluida. Tako na primjer u pumpnom postrojenju (slika 6.14.) Bernoullijeva jednadžba za presjek 1 i 2 (na razini vode u donjem i gornjem spremniku) glasi

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + h_1 + h_p - h_L = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_2 \quad (6.21)$$



Slika 6.14. Protok fluida u pumpno-motornom postrojenju

gdje je: h_p – dotok energije od pumpe, h_L – gubitak energije u cijevima i armaturi.

Gubitak energije u cjevovodu i armaturi, prema dosad razmotrenom, računamo zbrajanjem linijskih i lokalnih otpora.

Udio lokalnih gubitaka se može i zanemariti ako je dužina cjevovoda $L > 1000 D$.

U pumpnom postrojenju (sliku 6.14.) koji se sastoji od donjeg i gornjeg spremnika, cjevovoda s armaturom i pumpom, za $h = h_2 - h_1$ - geodetsku visinu, visina dobave pumpe ili manometarska visina iznosi

$$h_p = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h + h_L \quad (6.22.)$$

Ako su brzine opadanja odnosno porasta razine tekućine u spremnicima male ili približno jednake nuli, a tlakovi u spremnicima jednaki (otvoreni spremnici!), tada je visina dobave ili manometarska visina

$$h_p = h + \frac{v^2}{2g} \left[\lambda \frac{L}{D} + \sum_{i=1}^n K_i \right] \quad (6.23.)$$

Koeficijente otpora trenja λ računamo prema formulama ili očitavanjem iz Moodyeva dijagrama, a lokalne koeficijente otpora K odabiremo iz tablica, na primjer u Strojarskom priručniku od B. Krauta.

Snaga pumpe je uvećana za stupanj iskorištenja η pumpe

$$P_p = \frac{Q \rho g h_p}{\eta} \quad (6.24.)$$

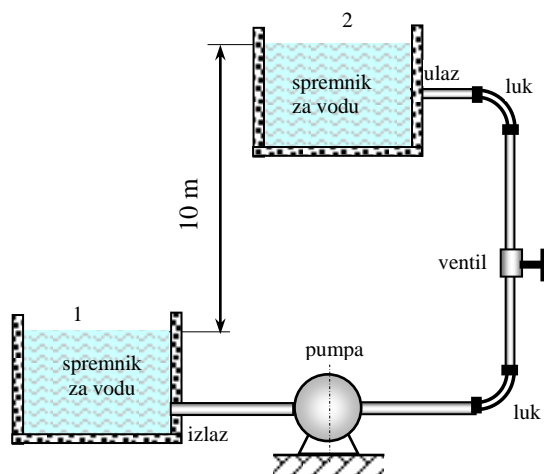
gdje je Q – protok fluida kroz pumpu, m^3/s ; ρ – gustoća fluida, kg/m^3 ; g – Zemljino ubrzanje, m/s^2 ; h_p – visina dobave ili manometarska visina pumpe, m ; η – stupanj iskorištenja pumpe.

Primjer 6.5. Izračunati snagu za pogon pumpe stupnja korisnosti $\eta = 0,75$. Pumpa služi za transport 15 L/s vode iz donjeg u gornji spremnik prema slici. Ukupna duljina cijevi je 200 m , promjera 100 mm i koeficijenta otpora trenja $\lambda = 0,02$. Za izlaz iz donjeg spremnika uzeti $K_i = 0,5$ a za ulaz u gornji spremnik $K_u = 1$. Na cjevovodu se nalaze dva luka čiji je svaki $K_l = 0,6$ te ventil sa $K_v = 6$. Za vodu uzeti gustoću $\rho = 1 \text{ kg/L}$.

Rješenje:

Količina protoka

$$Q = 15 \text{ L/s} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$



Slika 6. 15. uz primjer 6.5.

Brzina protjecanja vode u cijevima

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{D^2 \pi} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{0,1^2 \pi} \approx 1,91 \text{ m/s}$$

Visina dobave ili manometarska visina

$$h_p = h + \frac{v^2}{2g} \left[\lambda \frac{L}{D} + K_i + 2K_l + K_v + K_u \right]$$

Uvrstimo podatke i izračunajmo visinu

$$h_p = 10 + \frac{1,91^2}{2 \cdot 9,81} \left[0,02 \frac{200}{0,1} + 0,5 + 2 \cdot 0,6 + 6 + 1 \right]$$

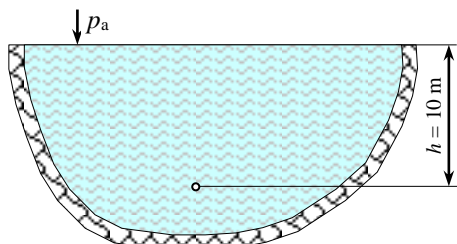
$$h_p = 10 + 9,06 = 19,06 \text{ m}$$

Snaga pumpe

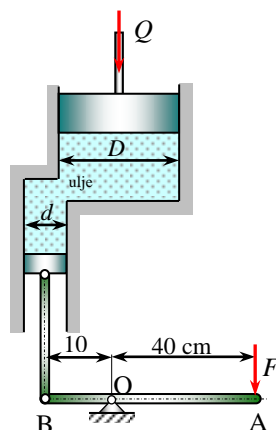
$$P = \frac{\rho g h_p Q}{\eta} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 19,06 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{0,75} \approx 3740 \text{ W} \quad \text{ili} \quad P \approx 3,74 \text{ kW}$$

Zadatci-mehanika fluida

Zadatak 6.1. Koliki je tlak u dubini mora od 10 m ako je gustoća mora $\rho = 1,03 \text{ kg}/\text{dm}^3$ i normirani atmosferski tlak $p_a = 1013 \text{ hPa}$ na morskoj površini? Dobiveni tlak izraziti u Pa , kPa i barima . (Odgovor: $p \approx 202 \text{ kPa}$)



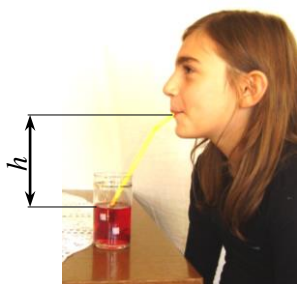
Zadatak 6.1.



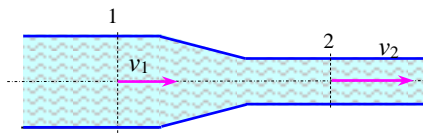
Zadatak 6.2.

Zadatak 6.2. Kolika sila F djeluje na ručici dizalice u točki A ako se podiže teret $Q = 25,6 \text{ kN}$? Ručica dizalice može zakretati oko okretišta O. Veći stap je promjera $D = 400 \text{ mm}$, a manji $d = 50 \text{ mm}$. (Odgovor: $F = 100 \text{ N}$)

Zadatak 6.3. Sok razrijeđen vodom ($\rho \approx 1 \text{ kg/L}$) iz čaše pije djevojčica Iva pomoću slamčice. Ako je atmosferski tlak 100 kPa i visinska razlika razine vode u čaši i usana $h = 20 \text{ cm}$, koliki je minimalni tlak na usnama? (Odgovor: $p_{usana} = 98,04 \text{ kPa}$)



Zadatak 6.3.



Zadatak 6.4.

Zadatak 6.4. U horizontalnoj cijevi promjenjivog presjeka teče voda brzinom $v_1 = 1,5 \text{ m/s}$ kroz presjek promjera $d_1 = 50 \text{ mm}$ pri tlaku 2 bara. Koliki je protok vode i koliki je tlak u presjeku 2 promjera $d_2 = 25 \text{ mm}$? (Odgovor: $Q \approx 2,95 \text{ L/s}$; $p_2 = 1,83 \cdot 10^5 \text{ Pa}$)

Primjer 6.5. Motor nominalne snage $P = 1,5 \text{ kW}$ i stupnja korisnosti $\eta_m = 0,953$ pogoni pumpu za vodu, koja opskrbljuje prskalicu s 14 rasprskivača. Stupanj korisnosti pumpe je $\eta_p = 0,94$. Ako zanemarimo gubitke odrediti radni tlak pumpe ako svaki rasprskivač izbacuje $2,3 \text{ L/min}$. (Odgovor: $p = 25 \text{ bara}$)

Literatura:

- Alfirević, I., Virag, Z.: Mehanika fluida, u knjizi Inženjerski priručnik IP1, Školska knjiga, Zagreb 1996.
- Arkuš, A. I.: Tehničkaskaja mehanika, Vysšaja škola, Moskva 1989.
- Černe, B.: Hidraulika, Školska knjiga, Zagreb 1973.
- Hannah, J., Hiller, M. J.: Applied Mechanics, Longman, London 1998.
- Jecić, S. Mehanika, u knjizi Praktičar 1, Školska knjiga, Zagreb 1971.
- Muftić, O.: Nauka o čvrstoći, u knjizi Praktičar 1, Školska knjiga, Zagreb 1971.
- Vujčić, M.: Inženjerska mehanika, Poljoprivredni fakultet, Osijek 2015.
- Walker, K.M.: Applied Mechanics for Engineering Technology, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 2000.

Veličina			Jedinica		
Naziv	Znak	Definicija	Naziv jedinice SI	Znak	Decimalne i ostale jedinice
duljina	l, L	Osnovna jedinica SI	metar	m	km = 10^3 m dm = 10^{-1} m cm = 10^{-2} m mm = 10^{-3} m μm = 10^{-6} m nm = 10^{-9} m
širina	b				
visina	h				
polumjer	$r, R,$				
promjer	d, D				
put, duljina puta	s				
polumjer zakrivljenosti	ρ				
kut, ravninski kut	α, β, \dots	$\varphi = s/r$	radijan	rad \equiv 1	
ploština, površina	A, S	$A = l b$	četvorni metar	m ²	dm ² = 10^{-2} m ² cm ² = 10^{-4} m ² mm ² = 10^{-6} m ² a = 10^2 m ² ha = 10^4 m ²
obujam, volumen	V	$V = l b h$	kubni metar	m ³	L = dm ³ = 10^{-3} m ³ dL = 10^{-1} dm ³ = 10^{-4} m ³ cL = 10^{-2} dm ³ = 10^{-5} m ³
vrijeme	t, T	Osnovna jedinica SI	sekunda	s	min = 60 s h = 60 min = 3 600 s
brzina	v, u, c	$v = ds/dt$	metar u sekundi	m/s	km/h = $\frac{1}{3,6}$ m/s m/min = $\frac{1}{60}$ m/s
ubrzanje	a, g	$a_t = dv/dt$	metar u sekundi na kvadrat	m/s ²	
kutna brzina	ω	$\omega = d\varphi/dt$	radijan u sekundi	rad/s = s ⁻¹	
kutno ubrzanje	α	$\alpha = d\omega/dt$	radijan u sekundi na kvadrat	rad/s ² = s ⁻²	
brojnost događaja	N			1	
frekvencija, učestalost	f	$f = 1/T$	herc (hertz), recipročna sekunda	Hz = s ⁻¹	
frekvencija vrtnje, brzina vrtnje	n	$n = N/t$	sekunda na minus prvu	s ⁻¹	min ⁻¹ = $\frac{1}{60}$ s ⁻¹
masa	m	Osnovna jedinica SI	kilogram	kg	g = 10^{-3} kg dag = 10^{-2} kg t = 10^3 kg
gustoća	ρ	$\rho = m/V$	kilogram po kubnom metru	kg/m ³	kg/L = kg/dm ³ = 10^{-3} kg/m ³
moment tromosti (dinamički)	I	$I = \sum m_i r_i^2$	kilogrammetar na kvadrat	kg·m ²	

silna, težina	F, G, Q	$F = ma, G = mg$	njutn (newton)	$N = \text{kgm/s}^2$	$\text{kN} = 10^3 \text{ N}$ $\text{MN} = 10^6 \text{ N}$
moment sile, moment sprega	M, T	$M = F \cdot h$	njutnmetar	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{N} \cdot \text{cm} = 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$ $\text{N} \cdot \text{mm} = 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ $\text{kN} \cdot \text{cm} = 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$
tlak, naprezanje	p, σ, τ	$p = \frac{F}{A}$ $\sigma = \frac{F}{A}, \tau = \frac{F}{A_s}$	paskal (pascal)	$\text{Pa} = \text{N/m}^2$	$\text{kPa} = 10^3 \text{ Pa}$ $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = \text{N/mm}^2$ $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa} = \text{kN/mm}^2$ $\text{hPa} = 10^2 \text{ Pa}$ $\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$ $\text{mbar} = 10^2 \text{ Pa}$ $\text{mmHg} \approx 133,3 \text{ Pa}^{(1)}$
duljinska deformacija	ε	$\varepsilon = \Delta l/l$		$\text{m/m} = 1$	
kutna deformacija	γ	$\gamma = \Delta b/b$		$\text{m/m} = \text{rad}$	
modul elastičnosti	E	$E = \sigma/\varepsilon$	paskal	Pa	$\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = \text{N/mm}^2$ $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa} = \text{kN/mm}^2$
modul smičnosti	G	$G = \tau/\gamma$	paskal	Pa	$\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa} = \text{N/mm}^2$ $\text{GPa} = 10^9 \text{ Pa} = \text{kN/mm}^2$
moment tromosti presjeka	J	$J_y = \sum A_i z_i^2$	metar na četvrtu	m^4	$\text{cm}^4 = 10^{-8} \text{ m}^4$
polarni moment tromosti presjeka	J_p	$J_p = \sum A_i r_i^2$	metar na četvrtu	m^4	$\text{cm}^4 = 10^{-8} \text{ m}^4$
moment otpora presjeka	W	$W_y = J_y / z_{\max}$	metar na treću	m^3	$\text{cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$
polarni moment otpora presjeka	W_p	$W_p = J_p / r_{\max}$	metar na treću	m^3	$\text{cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$
protok (volumenski)	Q	$Q = A \cdot v$	kubni metar u sekundi	m^3/s	$\text{L/s} = 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\text{m}^3/\text{min} = \frac{1}{60} \text{ m}^3/\text{s}$ $\text{m}^3/\text{h} = \frac{1}{3600} \text{ m}^3/\text{s}$
protok (maseni)	Q_m		kilogram u sekundi	kg/s	$\text{g/s} = 10^{-3} \text{ kg/s}$ $\text{t/h} = \frac{1}{3,6} \text{ kg/s}$
rad, energija	W, E	$W = F \cdot s$ $E_p = mgh$ $E_k = \frac{1}{2} mv^2$	džul (joule)	$\text{J} = \text{N} \cdot \text{m}$	$\text{kJ} = 10^3 \text{ J}$ $\text{MJ} = 10^6 \text{ J}$ $\text{kW} \cdot \text{h} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$
snaga	P	$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$	vat (watt)	$\text{W} = \text{J/s}$	$\text{kW} = 10^3 \text{ W}$ $\text{MW} = 10^6 \text{ W}$ $\text{KS}^{(2)} \approx 736 \text{ W}$

Napomena: ⁽¹⁾ Samo za mjerenje tlaka tjelesnih tekućina (krvi!). ⁽²⁾ Jedinica se koristi zbog tradicije.

